UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

2. Präsenzblatt - Lösungen

Aufgabe P5 (Beispiele und Gegenbeispiele für Gruppen).

(a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen eine Gruppe bilden:

(i) $(\mathbb{N}, +)$

(ii) $(\mathbb{Q}, \cdot)$

(iii) $(\{-1, 1\}, \cdot)$

(iv) $(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \cdot)$

(v) $\left(\mathbb{N} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \cdot\right)$

(vi) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$

(vii) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \circledast)$

(viii) $(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \otimes)$,

wobei wir die Verknüpfungen $(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ und $q_1 \circledast q_2 := \frac{q_1}{q_2}$ definieren.

(b) Wir definieren die Verknüpfung

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto x * y := x + y + 2,$$

wobei „+“ die gewöhnliche Addition bezeichnet. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

Lösung:

(a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen eine Gruppe bilden:

(i) Neutrales Element fehlt, inverse Elemente fehlen. Ein neutrales Element e müsste erfüllen: $e + x = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$, d.h. es müsste $e = 0$ gelten. Aber $0 \notin \mathbb{N}$.)

(ii) Inverses Element fehlt. Neutrales Element muss $1 \in \mathbb{Q}$ sein, denn es gilt $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ und neutrales Element ist eindeutig. Aber $x = 0 \in \mathbb{Q}$ hat kein inverses Element $x' \in \mathbb{Q}$, denn dieses müsste erfüllen $1 = x' \cdot x = x' \cdot 0 = 0$, Widerspruch.

(iii) Gruppe

(iv) Gruppe

(v) Verknüpfung nicht abgeschlossen ($2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{N} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$)

(vi) Inverse Elemente fehlen. Wäre $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$ Gruppe, so müsste 1 das neutrale Element sein, denn es gilt für alle $x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$: $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$. Wäre nun y Inverses von 2, so müsste dieses erfüllen $y \cdot 2 = 1$, d.h. $y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.)

(vii) Nicht assoziativ ($2 \circledast (2 \circledast 3) = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \neq \frac{1}{3} = \frac{\frac{2}{2}}{3} = (2 \circledast 2) \circledast 3$)

(viii) Verknüpfung nicht abgeschlossen ($(1, 0), (0, 1) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, aber $(1, 1) = (0, 1) \otimes (1, 0) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$)

(b) Wir müssen die Axiome einer Gruppe überprüfen.

1) **Abgeschlossenheit** der Verknüpfung: Sei $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $x * y = x + y + 2 \in \mathbb{Z}$.
2) **Assoziativität**: Wir nutzen aus, dass die gewöhnliche Multiplikation/Addition auf $\mathbb{Z}$ assoziativ und kommutativ ist. Damit erhalten wir für $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}(x * y) * z = (x + y + 2) * z = (x + y + 2) + z + 2 &\overset{\text{Komm/Ass in } \mathbb{R}}{=} x + (y + z + 2) + 2 \\ = x * (y + z + 2) = x * (y * z)\end{aligned}$$

3) **Neutrales Element**: Wähle $e_G = -2 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$e_G * x = -2 + x + 2 = x = x + (-2) + 2 = x * e_G,$$

d.h. $e_G = -2$ ist das neutrale Element in $(\mathbb{Z}, *)$.

4) **Inverse Elemente**: Wir behaupten, dass das inverse Element zu $x \in \mathbb{Z}$ über $x' := -x - 4 \in \mathbb{Z}$ gegeben ist. Beweis:

$$\begin{aligned}x' * x &= x' + x + 2 = (-x - 4) + x + 2 = -2 = e_G, \\ x * x' &= x + x' + 2 = x + (-x - 4) + 2 = -2 = e_G.\end{aligned}$$

5) **Kommutativität**: Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$x * y = x + y + 2 = y + x + 2 = y * x.$$

Aufgabe P6 (Permutationen).
Gegeben seien folgende Permutationen in $(S_5, \circ)$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie $\sigma(2)$, $\sigma(4)$ und $\tau(1)$ an.

(b) Stellen Sie σ und τ in der Zykelschreibweise dar.

(c) Bestimmen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} und τ^{-1} in $(S_5, \circ)$ in Zykel- und Permutationsschreibweise.

Lösung:

(a) $\sigma(2) = 3$, $\sigma(4) = 5$, $\tau(1) = 3$

(b) $\sigma = (123)(45)$, $\tau = (135)(2)(4)$

(c)
- $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2345)$
- $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1254)(3)$
- $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (132)(45)$
- $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (153)(2)(4)$

Aufgabe P7 (Gruppenhomomorphismen, Punkte).
Sei $(G, *)$ eine Gruppe, e_G ihr neutrales Element und $g \in G$ fest gewählt.

(a) Wir betrachten folgende Abbildungen:

(i) $\varphi_1 : G \to G, x \mapsto x * g$

(ii) $\varphi_2 : G \to G, x \mapsto g' * x * g$

(iii) $\varphi_3 : G \to G, x \mapsto x * x$

Untersuchen Sie φ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf Bijektivität. Handelt es sich dabei um Gruppenhomomorphismen oder sogar um Gruppenisomorphismen?
Hinweis: Für jede zutreffende Eigenschaft wird ein formaler Beweis erwartet. Falls eine Eigenschaft nicht zutrifft, so wird ein Gegenbeispiel mit einer expliziten Gruppe G (und explizitem $g \in G$) erwartet. Nutzen Sie dafür zum Beispiel folgende Gruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(S_3, \circ)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Betrachten Sie nun die Gruppe $(\mathbb{Z}, *)$ aus Aufgabe P5(b).

(b) Nutzen Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x - 2$ um zu zeigen, dass

$$(\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}, *).$$

Lösung:

Bei dieser Aufgabe sollen nicht alle verwendeten Gruppenaxiome detailliert aufgeführt werden.

(a) (i)

- φ_1 ist injektiv, denn: Seien $x, y \in G$ mit $x * g = \varphi_1(x) = \varphi_1(y) = y * g$.
  $\Rightarrow x = (x * g) * g' = (y * g) * g' = y$.
- φ_1 ist surjektiv, denn: Für $y \in G$ wähle $x := y * g'$.
  Dann gilt $\varphi_1(x) = (y * g') * g$.
- Damit ist φ_1 bijektiv (surjektiv und injektiv).
  Alternativ kann die Bijektivität auch direkt gezeigt werden, indem eine Umkehrabbildung angegeben wird (vgl. Bemerkung am Ende des 1. Kapitels): Definiere $\psi : G \to G, x \mapsto x * g'$. Dann gilt für beliebiges $x \in G$:

  $$(\varphi_1 \circ \psi)(x) = \varphi_1(\psi(x)) = \varphi_1(x * g') = (x * g') * g = x = \mathrm{id}_G(x),$$

  d.h. $\varphi_1 \circ \psi = \mathrm{id}_G$.
  Außerdem gilt für beliebiges $x \in G$:

  $$(\psi \circ \varphi_1)(x) = \psi(\varphi_1(x)) = \psi(x * g) = (x * g) * g' = x = \mathrm{id}_G(x),$$

  d.h. $\psi \circ \varphi_1 = \mathrm{id}_G$.
- φ_1 ist im Allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus.

  (Idee: Es gilt $\varphi_1(x * y) = (x * y) * g$, aber $\varphi_1(x) * \varphi_1(y) = (x * g) * (y * g)$, d.h. auf der rechten Seite ist „ein g zuviel“; Wir erwarten grundsätzlich andere Ergebnisse.)

  Konkretes Gegenbeispiel: Wähle $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ und $g = 2$, $x = y = 3$. Dann gilt $\varphi_2(x + y) = \varphi_2(6) = 6 + 2 = 8$, aber $\varphi_2(x) + \varphi_2(y) = (3 + 2) + (3 + 2) = 10$.

(ii)

- φ_2 ist injektiv, denn: Seien $x, y \in G$ mit $\varphi_2(x) = \varphi_2(y)$.
  $\Rightarrow g' * x * g = g' * y * g$
  $\Rightarrow x = g * (g' * x * g) * g' = g * (g' * y * g) * g' = y$
- φ_2 ist surjektiv, denn: Sei $y \in G$ beliebig. Wähle $x := g * y * g'$. Dann gilt $\varphi_2(x) = \varphi_2(g * y * g') = g' * (g * y * g') * g = y$.

- Damit ist φ_2 bijektiv.
  Alternativ kann die Bijektivität auch direkt gezeigt werden, indem eine Umkehrabbildung angegeben wird (vgl. Bemerkung am Ende des 1. Kapitels): Definiere $\psi : G \to G, x \mapsto g * x * g'$. Dann gilt für beliebiges $x \in G$:

$$(\varphi_2 \circ \psi)(x) = \varphi_2(\psi(x)) = \varphi_2(g * x * g') = g' * (g * x * g') * g = x = \mathrm{id}_G(x),$$

  d.h. $\varphi_2 \circ \psi = \mathrm{id}_G$.
  Außerdem gilt für beliebiges $x \in G$:

$$(\psi \circ \varphi_2)(x) = \psi(\varphi_2(x)) = \psi(g' * x * g) = g * (g' * x * g) * g' = x = \mathrm{id}_G(x),$$

  d.h. $\psi \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_G$.
- φ_2 ist ein Gruppenhomomorphismus, denn: Für $x, y \in G$ beliebig gilt

$$\varphi_2(x) * \varphi_2(y) = (g' * x * g) * (g' * y * g) \overset{g*g'=e_G}{=} g' * (x * y) * g = \varphi_2(x * y).$$

- Damit ist φ_2 auch ein Gruppenisomorphismus (Gruppenhomomorphismus und bijektiv).

(iii)
- φ_3 ist im Allgemeinen nicht injektiv.
  Konkretes Gegenbeispiel: Wähle $(G, *) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit $e_G = 1$. Wähle $x = 2$, $y = -2$. Dann gilt $\varphi_3(x) = 2 \cdot 2 = 4 = (-2) \cdot (-2) = \varphi_3(y)$, aber $x \neq y$.
- φ_3 ist im Allgemeinen nicht surjektiv.
  Konkretes Gegenbeispiel: Wähle $(G, *) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit $e_G = 1$. Dann gibt es kein $x \in G$ mit $x \cdot x = \varphi_3(x) = -1 \in G$.
- φ_3 ist im Allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus.

  (Idee: $\varphi_3(x * y) = (x * y) * (x * y)$, aber $\varphi_3(x) * \varphi_3(y) = (x * x) * (y * y)$. Für ein Gegenbeispiel brauchen wir also eine nicht abelsche Gruppe.)

  Konkretes Gegenbeispiel: Wähle $(G, *) = (S_3, \circ)$. Wähle $x = (132)$, $y = (13)$. Dann gilt $x \circ x = (123)$, $y \circ y = ()$ und daher $\varphi_3(x) \circ \varphi_3(y) = (x \circ x) \circ (y \circ y) = (123)$. Aber es gilt $x \circ y = (12)$ und daher $\varphi_3(x \circ y) = (x \circ y) \circ (x \circ y) = ()$.

(b)
- φ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn: Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann gilt:

$$\varphi(x + y) = x + y - 2$$

  und

$$\varphi(x) * \varphi(y) = (x - 2) * (y - 2) = (x - 2) + (y - 2) + 2 = x + y - 2,$$

  d.h. $\varphi(x + y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.
- φ ist bijektiv, denn: Definiere $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x + 2$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(x - 2) = (x - 2) + 2 = x = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(x),$$

  d.h. $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi(x + 2) = (x + 2) - 2 = x = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(x),$$

  d.h. $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.
  Damit ist ψ Umkehrabbildung von φ. Mit der Bemerkung am Ende von Kapitel 1 der Vorlesung folgt: φ ist bijektiv.

- Damit ist φ Gruppenisomorphismus, d.h. $(\mathbb{Z},+) \cong (\mathbb{Z},*)$.

Aufgabe P8 (Beweise mit Gruppen und Gruppenhomomorphismen).
Sei $(G,*)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G.

(a) Gegeben seien die folgenden Aussagen:

(i) $\forall a,b \in G : (a*b)*(a'*b') = e_G$

(ii) $\forall a,b \in G : (a*b)*(a*b) = (a*a)*(b*b)$

Zeigen Sie: Aus (i) bzw. (ii) folgt jeweils, dass G abelsch ist.

Sei nun $(H,\circledast)$ eine weitere Gruppe mit neutralem Element e_H. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $N := \varphi^{-1}(\{e_H\})$.

(b) Zeigen Sie: Es gilt

$$gN = Ng,$$

wobei $gN := \{g*n : n \in N\}$ und $Ng := \{n*g : n \in N\}$.

Lösung:

(a) (i) Seien $a,b \in G$ beliebig.
Möglichkeit 1: Weg in einer Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
a*b &\overset{\text{neutr.Elem.}}{=} (a*b)*e_G \\
&\overset{\text{inv.Elem.}}{=} (a*b)*(a'*a) \\
&\overset{\text{neutr.Elem.}}{=} (a*b)*[(a'*e_G)*a] \\
&\overset{\text{inv.Elem.}}{=} (a*b)*[(a'*(b'*b))*a] \\
&\overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a*b)*[((a'*b')*b)*a] \\
&\overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a*b)*[(a'*b')*(b*a)] \\
&\overset{\text{Ass.ges.}}{=} [(a*b)*(a'*b')]*(b*a) \\
&\overset{\text{Vorauss.}}{=} e_G*(b*a) \\
&\overset{\text{neutr.Elem.}}{=} b*a
\end{aligned}$$

Möglichkeit 2: Mit Implikationen:

$$\begin{aligned}
&(a*b)*(a'*b') = e_G \\
\overset{|*b}{\Longrightarrow}\ &((a*b)*(a'*b'))*b = e_G*b
\end{aligned} \tag{3}$$

Nun ist (linke Seite)

$$\begin{aligned}
((a*b)*(a'*b'))*b &\overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a*b)*((a'*b')*b) \\
&\overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a*b)*(a'*(b'*b)) \overset{\text{inv.Elem.}}{=} (a*b)*(a'*e_G) \\
&\overset{\text{neutr.Elem.}}{=} (a*b)*a'
\end{aligned}$$

und (rechte Seite)

$$e_G*b \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} b.$$

Eingesetzt in (3):

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (a*b)*a' = b \\ &\overset{|*a}{\Longrightarrow} \quad ((a*b)*a')*a = b*a \end{aligned} \tag{4}$$

Linke Seite:

$$((a*b)*a')*a \overset{\text{Ass.ges.}}{=} a*b(a*b)*(a'*a) \overset{\text{inv.Elem.}}{=} (a*b)*e_G \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} a*b$$

Eingesetzt in (4):

$$\Rightarrow a*b = b*a$$

(ii) Seien $a, b \in G$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &(a*b)*(a*b) = (a*a)*(b*b) \\ \overset{|*b'}{\Longrightarrow} \quad &((a*b)*(a*b))*b' = ((a*a)*(b*b))*b' \end{aligned} \tag{5}$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned} ((a*b)*(a*b))*b' &\overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a*b)*((a*b)*b') \overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a*b)*(a*(b*b')) \\ &\overset{\text{inv.Elem.}}{=} (a*b)*(a*e_G) \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} (a*b)*a \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} ((a*a)*(b*b))*b' &\overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a*a)*((b*b)*b') \overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a*a)*(b*(b*b')) \\ &\overset{\text{inv.Elem.}}{=} (a*a)*(b*e_G) \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} (a*a)*b \end{aligned}$$

Einsetzen in (5):

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (a*b)*a = (a*a)*b \\ &\overset{a'*|}{\Longrightarrow} \quad a'*((a*b)*a) = a'*((a*a)*b) \end{aligned} \tag{6}$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned} a'*((a*b)*a) &\overset{\text{Ass.ges.}}{=} a'*(a*(b*a)) \overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a'*a)*(b*a) \\ &\overset{\text{inv.Elem.}}{=} e_G*(b*a) \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} b*a \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} a'*((a*a)*b) &\overset{\text{Ass.ges.}}{=} (a'*(a*a))*b \overset{\text{Ass.ges.}}{=} ((a'*a)*a)*b \\ &\overset{\text{inv.Elem.}}{=} (e_G*a)*b \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} a*b \end{aligned}$$

Einsetzen in (6):

$$\Rightarrow b*a = a*b$$

(b) Zu zeigen ist eine Gleichheit von Mengen. Wir zeigen nur „$\subseteq$“, die andere Richtung „$\supseteq$“ lässt sich analog zeigen.
Sei $x \in gN$ beliebig.
$\Rightarrow$ Es gibt $n \in N$ mit $x = g*n$.
$\overset{n\in N}{\Rightarrow} \varphi(n) = e_H$
Wähle $\tilde{n} := g*n*g'$.
$\Rightarrow \varphi(\tilde{n}) = \varphi(g*n*g') \overset{\varphi \text{ Grphom.}}{=} \varphi(g) \circledast \varphi(n) \circledast \varphi(g)' \overset{\varphi(n)=e_H}{=} \varphi(g) \circledast \varphi(g)' = e_H$
$\Rightarrow \tilde{n} \in N$
Es gilt $\tilde{n}*g = (g*n*g')*g = g*n = x$
$\Rightarrow x \in Ng$

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`