UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

2. Präsenzblatt

Aufgabe P5 (Beispiele und Gegenbeispiele für Gruppen).

(a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen eine Gruppe bilden:

(i) $(\mathbb{N}, +)$

(ii) $(\mathbb{Q}, \cdot)$

(iii) $(\{-1, 1\}, \cdot)$

(iv) $(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \cdot)$

(v) $\left(\mathbb{N} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \cdot\right)$

(vi) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$

(vii) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \circledast)$

(viii) $(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \otimes)$,

wobei wir die Verknüpfungen $(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ und $q_1 \circledast q_2 := \frac{q_1}{q_2}$ definieren.

(b) Wir definieren die Verknüpfung

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto x * y := x + y + 2,$$

wobei „+“ die gewöhnliche Addition bezeichnet. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe P6 (Permutationen).

Gegeben seien folgende Permutationen in $(S_5, \circ)$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie $\sigma(2)$, $\sigma(4)$ und $\tau(1)$ an.

(b) Stellen Sie σ und τ in der Zykelschreibweise dar.

(c) Bestimmen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} und τ^{-1} in $(S_5, \circ)$ in Zykel- und Permutationsschreibweise.

Aufgabe P7 (Gruppenhomomorphismen, Punkte).

Sei $(G, *)$ eine Gruppe, e_G ihr neutrales Element und $g \in G$ fest gewählt.

(a) Wir betrachten folgende Abbildungen:

(i) $\varphi_1 : G \to G, x \mapsto x * g$

(ii) $\varphi_2 : G \to G, x \mapsto g' * x * g$

(iii) $\varphi_3 : G \to G, x \mapsto x * x$

Untersuchen Sie φ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf Bijektivität. Handelt es sich dabei um Gruppenhomomorphismen oder sogar um Gruppenisomorphismen?
Hinweis: Für jede zutreffende Eigenschaft wird ein formaler Beweis erwartet. Falls eine Eigenschaft nicht zutrifft, so wird ein Gegenbeispiel mit einer expliziten Gruppe G (und explizitem $g \in G$) erwartet. Nutzen Sie dafür zum Beispiel folgende Gruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(S_3, \circ)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Betrachten Sie nun die Gruppe $(\mathbb{Z}, *)$ aus Aufgabe P5(b).

(b) Nutzen Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x - 2$ um zu zeigen, dass

$$(\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}, *).$$

Aufgabe P8 (Beweise mit Gruppen und Gruppenhomomorphismen).
Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G.

(a) Gegeben seien die folgenden Aussagen:

(i) $\forall a, b \in G : (a * b) * (a' * b') = e_G$

(ii) $\forall a, b \in G : (a * b) * (a * b) = (a * a) * (b * b)$

Zeigen Sie: Aus (i) bzw. (ii) folgt jeweils, dass G abelsch ist.

Sei nun $(H, \circledast)$ eine weitere Gruppe mit neutralem Element e_H. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $N := \varphi^{-1}(\{e_H\})$.

(b) Zeigen Sie: Es gilt

$$gN = Ng,$$

wobei $gN := \{g * n : n \in N\}$ und $Ng := \{n * g : n \in N\}$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`