Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

1. Präsenzblatt - Lösungen

Aufgabe P1 (Mengenlehre).

(a) Gegeben seien die Mengen

$$X = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 25\}, \quad Y = \{x \in \mathbb{N} : 2 \cdot x > 5\}, \quad Z = \{5, 6, 7\}.$$

Geben Sie die folgenden Mengen an:

(i) $\mathcal{P}(Z)$
(ii) $X \cap Y$, $X \cup Y$ und $Y \backslash Z$
(iii) $(X \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ und $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$
(iv) $(X \backslash Y) \times (Z \backslash X)$

(b) Gegeben seien Mengen A, B, C. Beweisen Sie:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die folgende Regel aus der Aussagenlogik verwenden: Für zwei Aussagen a und b gilt:

- *De Morgan'sche Regel:* „nicht(a oder b)" $\Leftrightarrow$ „nicht(a) und nicht(b)"

Lösung:

(a) Es ist $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Damit:

(i) $\mathcal{P}(Z) = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}\}$
(ii) $X \cap Y = \{3, 4\}$
$X \cup Y = \mathbb{N}$
$Y \setminus Z = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 5, 6, 7\}$
(iii) Wir haben $X \setminus Z = X$ und $Z \setminus X = Z$.
$\Rightarrow (X \setminus Z) \cup (Z \setminus X) = X \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Ferner ist $X \setminus Y = \{1, 2\}$ und $Y \setminus X = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$. $\Rightarrow (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = \mathbb{N} \setminus \{3, 4\}$
(iv) $(X \backslash Y) \times (Z \backslash X) = \{1, 2\} \times \{5, 6, 7\} = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}$

(b) Wir müssen die folgenden Inklusionen zeigen:

$$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \text{ und } C \setminus (A \cup B) \supseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

(1) „$\subseteq$" Sei $x \in C \setminus (A \cup B)$.
$\Rightarrow x \in C$ und $x \notin A \cup B$ (per Definition) $\overset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow} x \in C$ und $x \notin A$ und $x \notin B$
$\Rightarrow x \in C$ und $x \notin A$ und $x \in C$ und $x \notin B$
$\Rightarrow x \in C \setminus A$ und $x \in C \setminus B$
$\Rightarrow x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
$\Rightarrow C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

(2) „$\supseteq$“ Sei $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

$\Rightarrow x \in C \setminus A$ und $x \in C \setminus B$ (per Definition)

$\Rightarrow x \in C$ und $x \notin A$ und $x \in C$ und $x \notin B$

$\Rightarrow x \in C$ und $x \notin A$ und $x \notin B \overset{Hinweis}{\Rightarrow} x \in C$ und $x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in C \setminus (A \cup B)$

$\Rightarrow C \setminus (A \cup B) \supseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

Bemerkung: Im zweiten Teil des Beweises sind wir einfach nur den ersten Weg „zurück gelaufen“. Man hätte hier die Implikationspfeile („$\Rightarrow$“) größtenteils durch Äquivalenzpfeile („$\Leftrightarrow$“) ersetzen können, so dass man sich den zweiten Teil des Beweises hätte sparen können.

Aufgabe P2 (Komposition von Abbildungen).

Es seien $X = \{1, 2, \dots, 10\}$, $Y = \{1, \dots, 6\}$ und $W = \{1, \dots, 5\}$. Des Weiteren seien die Abbildungen $f : X \to Y$, $g : W \to X$ und $h : W \to X$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } x \in X \text{ gerade} \\ \frac{x+1}{2} & \text{für } x \in X \text{ ungerade,} \end{cases} \\ g(w) &:= 2w \quad \text{für } w \in W, \\ h(w) &:= 2w - 1 \quad \text{für } w \in W \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $f(X)$ und die Urbilder der Mengen $\{1, 2\} \subseteq Y$ und $\{6\} \subseteq Y$ unter der Abbildung f.

(b) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass $g \neq h$ gilt, und dass $f \circ g = f \circ h$ gilt.

Lösung:

(a) Da die Menge X nur endlich viele Elemente enthält, können wir folgende Wertetabelle erstellen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Daraus können wir die gesuchten Mengen ablesen:

- $f(X) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3, 4\}$
- $f^{-1}(\{6\}) = \emptyset$

(b) Mit Hilfe der Wertetabelle aus Teilaufgabe (a) sehen wir:

- Die Abbildung f ist nicht injektiv, da $f(2) = 1 = f(1)$.
- Die Abbildung f ist nicht surjektiv, da $6 \notin f(X)$, d.h. es gibt kein $x \in X$ mit $f(x) = 6$.

(c) Wir zeigen (1.) $g \neq h$ und (2.) $f \circ g = f \circ h$.

(1.) Es gilt $g(2) = 4 \neq 3 = 2 \cdot 2 - 1 = h(2) \Rightarrow g(2) \neq h(2) \Rightarrow g \neq h$.

(2.) Für beliebiges $w \in W$ gilt: $(f \circ g)(w) = f(2w) = w$, da $2w$ immer gerade ist und $(f \circ h)(w) = f(2w-1) = \frac{2w-1+1}{2} = w$, da $2w-1$ immer ungerade ist.
$\Rightarrow$ Für alle $w \in W$ gilt: $(f \circ g)(w) = (f \circ h)(w)$
$\Rightarrow f \circ g = f \circ h$.

Aufgabe P3 (Mengen und Abbildungen).

Seien X, Y, A, B, C, D Mengen mit $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
Vervollständigen Sie dazu das untenstehende Beweisgerüst mit den angegebenen Blöcken:

Blöcke: $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } \setminus,\, x \in A}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f,\, y = f(x)}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } \setminus}}$ $\boxed{x \in A \setminus B}$ $\boxed{y \notin f(B)}$ $\boxed{y \notin f(B)}$
$\boxed{\text{mit } y = f(x)}$ $\boxed{\text{Angenommen, } x \in B}$ $\boxed{y \in f(A \setminus B)}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f,\, y = f(x)}}$ $\boxed{\text{Also ist } x \notin B}$
$\boxed{\text{Es gibt } x \in A}$ $\boxed{\text{Sei } y \in f(A) \setminus f(B)}$ $\boxed{y \in f(B), \text{ Widerspruch zu}}$ $\boxed{y \in f(A) \text{ und}}$

(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
Vervollständigen Sie dazu für die Richtung „$\subseteq$“ folgendes Beweisgerüst mit den untenstehenden Blöcken:

Blöcke: $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } \cup}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } \cup}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f,\, y = f(x)}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f,\, y = f(x)}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } \cup}}$ $\boxed{y \in f(A) \cup f(B)}$
$\boxed{\text{Fall 1: } x \in A}$ $\boxed{\text{Sei } y \in f(A \cup B)}$ $\boxed{\text{oder } x \in B}$ $\boxed{y \in f(A) \cup f(B)}$ $\boxed{\text{Fall 2: } x \in B}$
$\boxed{\text{Es gibt } x \in A \cup B}$ $\boxed{x \in A}$ $\boxed{y \in f(B)}$ $\boxed{\text{mit } y = f(x)}$ $\boxed{y \in f(A)}$

(c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Gilt bei (a) sogar Gleichheit? Falls nein, so geben Sie ein Gegenbeispiel an!

Lösung:

(a) Sei $y \in f(A) \setminus f(B)$.
$\xRightarrow{\text{Def. } \setminus} y \in f(A)$ und $y \notin f(B)$
$\xRightarrow{\text{Def. } f}$ Es gibt $x \in A$ mit $y = f(x)$.
Angenommen (Widerspruchsbeweis!), $x \in B$. $\xRightarrow{\text{Def. } f,\, y = f(x)}$ $y \in f(B)$, Widerspruch zu $y \notin f(B)$. Also ist $x \notin B$.

$\overset{\text{Def. }\setminus,\ x\in A}{\Longrightarrow} x \in A \setminus B$
$\overset{\text{Def. }f,\ y=f(x)}{\Longrightarrow} y \in f(A\setminus B)$

Die andere Richtung „$\supseteq$“ (und damit die Gleichheit) gilt nicht. Sei zum Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, und $A = \{-2, 2\}$, $B = \{2\}$. Dann ist $A\setminus B = \{-2\}$ und $f(A\setminus B) = f(\{-2\}) = \{4\}$, aber $f(A) = \{4\} = f(B)$ und somit $f(A)\setminus f(B) = \emptyset$.
Daher ist $f(A\setminus B) = \{4\} \not\subseteq \emptyset = f(A)\setminus f(B)$.

(b) Zu zeigen ist eine Gleichheit von Mengen. Wir zeigen „$\subseteq$“ und „$\supseteq$“.

„$\subseteq$“: Sei $y \in f(A \cup B)$.
$\overset{\text{Def. }f}{\Longrightarrow}$ Es gibt $x \in A \cup B$ mit $y = f(x)$.
$\overset{\text{Def. }\cup}{\Longrightarrow} x \in A$ oder $x \in B$
Fall 1: $x \in A$. $\overset{\text{Def. }f,\ y=f(x)}{\Longrightarrow} y \in f(A) \overset{\text{Def. }\cup}{\Longrightarrow} y \in f(A) \cup f(B)$
Fall 2: $x \in B$. $\overset{\text{Def. }f,\ y=f(x)}{\Longrightarrow} y \in f(B) \overset{\text{Def. }\cup}{\Longrightarrow} y \in f(A) \cup f(B)$

„$\supseteq$“: Sei $y \in f(A) \cup f(B)$.
$\overset{\text{Def. }\cup}{\Longrightarrow} y \in f(A)$ oder $y \in f(B)$.
Fall 1: $y \in f(A)$. $\overset{\text{Def. }f}{\Longrightarrow}$ Es gibt $x \in A$ mit $y = f(x) \overset{\text{Def. }\cup}{\Longrightarrow} x \in A \cup B$
$\overset{\text{Def. }f,\ y=f(x)}{\Longrightarrow} y \in f(A \cup B)$
Fall 2: $y \in f(B)$. $\overset{\text{Def. }f}{\Longrightarrow}$ Es gibt $x \in B$ mit $y = f(x) \overset{\text{Def. }\cup}{\Longrightarrow} x \in A \cup B$
$\overset{\text{Def. }f,\ y=f(x)}{\Longrightarrow} y \in f(A \cup B)$

(c) Sei $a \in A$. Es ist **zu zeigen**: $a \in f^{-1}(f(A))$

Es gilt: $a \in A \Rightarrow f(a) \in f(A) \Rightarrow a \in f^{-1}(f(A))$.

Der erste Schritt folgt aus der Definition des Bilds $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, d.h. insbesondere $f(a) \in f(A)$. Der zweite Schritt folgt aus der Definition des Urbilds $f^{-1}(f(A)) = \{x \in X : f(x) \in f(A)\}$, d.h. insbesondere $a \in f^{-1}(f(A))$.

Aufgabe P4 (Injektivität).

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

(b) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ g injektiv

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr.

Beweis: Seien $a, a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$.
$\overset{\text{Anwendung }g}{\Longrightarrow} (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a')$
$\overset{g\circ f\text{ injektiv}}{\Longrightarrow} a = a'$.
Damit ist die Definition von 'f injektiv' verifiziert, d.h. f ist injektiv.

(b) Die Aussage ist falsch. Wir geben ein Gegenbeispiel: Seien $A := \{1, 2\}$, $B := \{-4, 1, 2, 4\}$ und $C := \{1, 4, 16\}$. Wir definieren ferner $f : A \to B, x \mapsto x$ und $g : B \to C, x \mapsto x^2$.

Dann ist $g \circ f : A \to C, x \mapsto x^2$ ist injektiv.
Beweis: Seien $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$.
$\Rightarrow a = 1$, $a' = 2$ oder $a = 2, a' = 1$.

Es ist aber $(g \circ f)(1) = 1 \neq 4 = (g \circ f)(2)$. $\Rightarrow (g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a')$.

Andererseits ist g nicht injektiv, da $g(-4) = 16 = g(4)$ und $-4 \neq 4$.