UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

1. Präsenzblatt

Aufgabe P1 (Mengenlehre).

(a) Gegeben seien die Mengen

$$X = \{x \in \mathbb{N} :\ x^2 < 25\}, \quad Y = \{x \in \mathbb{N} : 2 \cdot x > 5\}, \quad Z = \{5, 6, 7\}.$$

Geben Sie die folgenden Mengen an:

(i) $\mathcal{P}(Z)$

(ii) $X \cap Y$, $X \cup Y$ und $Y \backslash Z$

(iii) $(X \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ und $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

(iv) $(X \backslash Y) \times (Z \backslash X)$

(b) Gegeben seien Mengen A, B, C. Beweisen Sie:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die folgende Regel aus der Aussagenlogik verwenden: Für zwei Aussagen a und b gilt:

- *De Morgan'sche Regel:* „nicht(a oder b)“ $\Leftrightarrow$ „nicht(a) und nicht(b)“

Aufgabe P2 (Komposition von Abbildungen).

Es seien $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $Y = \{1, \ldots, 6\}$ und $W = \{1, \ldots, 5\}$. Des Weiteren seien die Abbildungen $f : X \to Y$, $g : W \to X$ und $h : W \to X$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } x \in X \text{ gerade} \\ \frac{x+1}{2} & \text{für } x \in X \text{ ungerade,} \end{cases} \\ g(w) &:= 2w \quad \text{für } w \in W, \\ h(w) &:= 2w - 1 \quad \text{für } w \in W \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $f(X)$ und die Urbilder der Mengen $\{1, 2\} \subseteq Y$ und $\{6\} \subseteq Y$ unter der Abbildung f.

(b) Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass $g \neq h$ gilt, und dass $f \circ g = f \circ h$ gilt.

Aufgabe P3 (Mengen und Abbildungen).

Seien X, Y, A, B, C, D Mengen mit $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
Vervollständigen Sie dazu das untenstehende Beweisgerüst mit den angegebenen Blöcken:

Blöcke: $\overset{\text{Def. } \setminus,\, x \in A}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{Def. } f}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{Def. } f,\, y = f(x)}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{Def. } \setminus}{\Longrightarrow}$ $\boxed{x \in A \setminus B}$ $\boxed{y \notin f(B)}$ $\boxed{y \notin f(B)}$ $\boxed{\text{mit } y = f(x)}$ $\boxed{\text{Angenommen, } x \in B}$ $\boxed{y \in f(A \setminus B)}$ $\overset{\text{Def. } f,\, y = f(x)}{\Longrightarrow}$ $\boxed{\text{Also ist } x \notin B}$ $\boxed{\text{Es gibt } x \in A}$ $\boxed{\text{Sei } y \in f(A) \setminus f(B)}$ $\boxed{y \in f(B), \text{ Widerspruch zu}}$ $\boxed{y \in f(A) \text{ und}}$

(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
Vervollständigen Sie dazu für die Richtung „$\subseteq$“ folgendes Beweisgerüst mit den untenstehenden Blöcken:

Blöcke: $\overset{\text{Def. } \cup}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{Def. } f}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{Def. } \cup}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{Def. } f,\, y = f(x)}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{Def. } f,\, y = f(x)}{\Longrightarrow}$ $\overset{\text{Def. } \cup}{\Longrightarrow}$ $\boxed{y \in f(A) \cup f(B)}$ $\boxed{\text{Fall 1: } x \in A}$ $\boxed{\text{Sei } y \in f(A \cup B)}$ $\boxed{\text{oder } x \in B}$ $\boxed{y \in f(A) \cup f(B)}$ $\boxed{\text{Fall 2: } x \in B}$ $\boxed{\text{Es gibt } x \in A \cup B}$ $\boxed{x \in A}$ $\boxed{y \in f(B)}$ $\boxed{\text{mit } y = f(x)}$ $\boxed{y \in f(A)}$

(c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Gilt bei (a) sogar Gleichheit? Falls nein, so geben Sie ein Gegenbeispiel an!

Aufgabe P4 (Injektivität).
Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

(b) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ g injektiv

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`