Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

13. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 49	Aufgabe 50	Aufgabe 51	Aufgabe 52	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 49 (Berechnung von Determinanten, 4 = 3 + 1 Punkte).
Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben seien folgende Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix},$$

wobei $A_6 \in M(n \times n, \mathbb{Q})$.

(a) Berechnen Sie die Determinanten $\det(A_i)$, $i = 1, ..., 6$.
Hinweis für A_6: Multiplizieren Sie zum Beispiel die letzte Zeile zunächst mit n^{-1} und addieren Sie diese Zeile dann geeignet auf die anderen Zeilen, um eine Dreiecksgestalt zu erhalten.

(b) Berechnen Sie unter Nutzung der Ergebnisse aus (a) die Ausdrücke

$$\det((A_4 \cdot A_5)^{-1}), \qquad \det(-2A_4A_5^t), \qquad \det(A_2 \cdot (A_2^{-1} + A_2)).$$

Lösung:

(a)
- $\det(A_1) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$ (Regel für 2×2-Matrizen),
- $\det(A_2) = (-1)\cdot(-1)\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0 = -4$ (Regel von Sarrus)
- $\det(A_3) = 0$ (Zeile 1 und 2 sind offensichtlich linear abhängig).

- $$\begin{aligned}
\det(A_4) &= 2\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\\
&\underset{\text{auf Zeilen darunter addieren}}{\overset{\text{1. Zeile passend}}{=}} 2\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&\underset{\text{auf Zeilen darunter addieren}}{\overset{\text{2. Zeile passend}}{=}} 2\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -3 & 3\\ 0 & 0 & -4 & 5\\ 0 & 0 & -5 & 7\end{pmatrix}\\
&\underset{\text{zur 4. Zeile addieren}}{\overset{\text{3. Zeile passend}}{=}} 2\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -3 & 3\\ 0 & 0 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  Mit der Regel für obere Dreiecksmatrizen folgt:

  $$\det(A_4) = 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-4)\cdot\frac{3}{4} = 6.$$

- Blockmatrix-Regel:

  $\det(A_5) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (1\cdot 2 - 1\cdot 1)\cdot(2\cdot 1 - 3\cdot 1) = 1\cdot(-1) = -1.$

- $$\begin{aligned}
\det(A_6) &= n\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n\\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n\\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & n\\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&\underset{i=1,\dots,n-1}{\overset{\text{Letzte Zeile } (-i)\text{-mal auf Zeile } i}{=}} n\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&\underset{i=n,\dots,2}{\overset{\text{Tausche Zeile } i \text{ mit } i-1}{=}} n\cdot(-1)^{n-1}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\overset{\text{obere Dreiecksmatrix}}{=} n\cdot(-1)^{n-1}\cdot 1.
\end{aligned}$$

(b)
- $\det((A_4\cdot A_5)^{-1}) = \frac{1}{\det(A_4\cdot A_5)} = \frac{1}{\det(A_4)}\cdot\frac{1}{\det(A_5)} = -\frac{1}{6}.$

- $\det(-2A_4A_5^t) = (-2)^4\det(A_4A_5^t) = (-2)^4\det(A_4)\det(A_5^t) = (-2)^4\det(A_4)\det(A_5) = -96$
- $\det(A_2(A_2^{-1}+A_2)) = \det(A_2A_2^{-1}+A_2^2) = \det(E_3 + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix})$

  Mit der Regel von Sarrus folgt:

$$\begin{aligned}\det(A_2(A_2^{-1}+A_2)) = \det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} &= 2\cdot 5\cdot 0 + (-3)\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot(-4)\cdot(-5) \\ &\quad - 3\cdot 5\cdot 1 - (-5)\cdot 0\cdot 2 - 0\cdot(-4)\cdot -3 \\ &= 5.\end{aligned}$$

Aufgabe 50 (Determinante als Hilfsmittel, 4 = 1.5 + 0.5 + 1.5 + 0.5 Punkte).
Für $a \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & a & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M(4\times 4, \mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$, wobei $A := (v_1, v_2, v_3)$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 als Spalten hat.

(b) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ bilden (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$?

(c) Berechnen Sie $\det(B)$.

(d) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ besitzt das LGS $B \cdot x = 0$ keine, eine oder unendlich viele Lösungen?

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\det(A) &\overset{2\times\text{Zeilentausch}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\underset{\text{mit anderen Zeilen addieren}}{\overset{\text{3.Zeile Faktor vorziehen, 1. Zeile passend}}{=}} 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1-a^2 \\ 0 & -1 & 1-a \end{pmatrix} \\ &\underset{\text{zur unteren Zeile addieren}}{\overset{\text{2. Zeile passend}}{=}} 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Also erhalten wir $\det(A) = 2(-a^2-a+2) = -2(a-1)(a+2)$.

(b) Es gilt:

$$\det(A) \neq 0 \iff \operatorname{Rang}(A) = 3 \overset{v_1,v_2,v_3\in\mathbb{Q}^3}{\iff} (v_1, v_2, v_3) \text{ Basis}$$

Für $a \in \mathbb{Q}\setminus\{-2,1\}$ ist $\det(A) \neq 0$ (vgl. (a)). Damit bildet (v_1, v_2, v_3) eine Basis genau dann, wenn $a \in \mathbb{Q}\setminus\{-2,1\}$.

(c)

$$\det(B) \overset{\text{Zeilentausch}}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & a & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Zeilen addieren, 3.Zeile Faktor vorziehen}}{\overset{\text{1. Zeile passend mit anderen}}{=}} -2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & 5 \\ 0 & a-8 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Zeilentausch}}{=} 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & a-8 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{zu unteren Zeilen addieren}}{\overset{\text{2. Zeile passend}}{=}} 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{a+2}{5} & a-3 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

Auswertung über die Regeln für Blockmatrizten ergibt

$$\det(B) = 2\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{smallmatrix}\right)\det\begin{pmatrix} \frac{a+2}{5} & a-3 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix} = 2\cdot(1\cdot(-5)-0\cdot2)\cdot\left(-1\cdot\frac{a+2}{5} - \frac{4}{5}(a-3)\right) = 10(a-2)$$

(Alternativ hätten wir hier auch solange umformen können, bis eine obere Dreiecksmatrix entsteht. Das Produkt der Diagonaleinträge ergibt dann die Determinante.)

(d) Fall 1: $a \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$. Dann gilt $\det(B) \neq 0$.
$\implies$ $\mathrm{Rang}(B) = 4$
$\implies$ $\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Lös}(B,0) = 4 - \mathrm{Rang}(B) = 0$
$\implies$ $\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Lös}(B,0) = \{0\}$, d.h. $B \cdot x = 0$ hat nur die triviale Lösung.
Fall 2: $s = 2$.
$\implies$ $\det(B) = 0 \implies \mathrm{Rang}(B) < 4$
$\implies$ $\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Lös}(B,0) = 4 - \mathrm{Rang}(B) > 0$
$\implies$ $\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Lös}(B,0)$ hat unendlich viele Elemente (da Grundkörper $\mathbb{Q}$ unendlich viele Elemente hat), d.h. $B \cdot x = 0$ hat unendlich viele Lösungen.
(Es gibt keinen Fall, indem das LGS keine Lösungen hat).

Aufgabe 51 (Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes, 4 = 1.5 + 0.5 + 1 + 1 Bonuspunkte).

Für eine Erläuterung des Laplace'schen Entwicklungssatzes siehe P51.
Für $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ definieren wir die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 & 2 & -\lambda \\ \lambda & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 3 & \lambda-3 \\ 2-\lambda & \lambda & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \in M(4\times4,\mathbb{Q}), \qquad B_n := \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu \\ 0 & \dots & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix} \in M(n\times n,\mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{Q}$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist A invertierbar?

(c) Zeigen Sie, dass B_n folgende Rekursionsgleichung für $\det(B_n)$ für $n \geq 4$ erfüllt:

$$\det(B_n) = \lambda \det(B_{n-1}) - \mu^2 \det(B_{n-2}).$$

Hinweis: Entwickeln Sie B_n zunächst nach der ersten Zeile und eine der beiden resultierenden Matrizen nach der ersten Spalte.

(d) Sei nun $\lambda = 5$, $\mu = -2$. Finden Sie eine Darstellung $\det(B_n) = c_1 \cdot d_1^n + c_2 \cdot d_2^n$ $(n \geq 2)$ mit geeigneten $c_1, d_1, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$. Weisen Sie deren Gültigkeit mit vollständiger Induktion nach.
Hinweis: Setzen Sie zunächst $\det(B_n) = d^n$ in die Rekursionsgleichung ein und ermitteln Sie so die beiden Werte d_1, d_2.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\det(A) \underset{\text{auf jede weitere Zeile addieren}}{\overset{\text{2. Zeile passend}}{=}} \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ \lambda & 2 & 1 & -1 \\ 3-3\lambda & 2 & 0 & \lambda \\ 2-2\lambda & \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

Wir entwickeln nach der 3. Spalte und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda-2 & 2-\lambda \\ 3-3\lambda & 2 & \lambda \\ 2-2\lambda & \lambda-2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= -(1-\lambda) \det\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda-2 & 2-\lambda \\ 3 & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{(-1)Z1+Z3\to Z3}{=} (\lambda-1) \det\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda-2 & 2-\lambda \\ 3 & 2 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

(Man kann natürlich auch jetzt bereits die Regel von Sarrus für 3x3-Matrizen anwenden).
Entwicklung nach 1. Zeile liefert

$$\det(A) = (\lambda-1)\det\left(\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}\right) = (\lambda-1)[(\lambda-2)\lambda - 2(2-\lambda)] = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2).$$

(b) Für $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 1, 2\}$ gilt $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar.
Für $\lambda \in \{-2, 1, 2\}$ gilt $\det(A) = 0 \Rightarrow A$ nicht invertierbar.

(c) Wir entwickeln B_n nach der 1. Zeile und erhalten

$$\det(B_n) \overset{\text{Entw. 1. Zeile}}{=} (-1)^{1+1} \cdot \lambda \cdot \det\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu \\ 0 & \dots & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix}}_{=B_{n-1}}\Bigg)$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot \mu \cdot \det\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} \mu & \mu & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \lambda & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \mu \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix}}_{=:A \in M((n-1)\times(n-1),\mathbb{R})}\Bigg).$$

Wir entwickeln A nach der 1. Spalte und bekommen

$$\det(B_n) = \lambda\det(B_{n-1}) + (-1)^{1+1}\cdot\mu\cdot(-1)^3\cdot\mu\cdot\det(\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu \\ 0 & \dots & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix}}_{=B_{n-2}})$$

$$= \lambda\det(B_{n-1}) - \mu^2\det(B_{n-2}).$$

(d) Setzen wir zunächst $\det(B_n) = d^n$ in die Rekursionsgleichung ein, erhalten wir (für $d \neq 0$):

$$d^n = \lambda d^{n-1} - \mu^2 d^{n-2} \iff d^2 - \lambda\cdot d + \mu^2 = 0,$$

Lösungsformel quadratische Gleichungen $\Rightarrow d_{1/2} = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu^2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$,
d.h. $d_1 = 1$, $d_2 = 4$.
Für $n \in \{2, 3\}$ gilt dann: (*)

$$c_1 + 16c_2 = c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2 = \det(B_2) = \det\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \mu^2 = 25 - 4 = 21,$$
$$c_1 + 64c_2 = c_1 d_1^3 + c_2 d_2^3 = \det(B_3) = \det\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ \mu & \lambda & \mu \\ 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda\mu^2 = 125 - 40 = 85.$$

Lösen des LGS in c_1, c_2 liefert: $c_1 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{4}{3}$.
Vermutung: Für $n \geq 2$ gilt:

$$\det(B_n) = c_1 d_1^n + c_2 d_2^n = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cdot 4^n.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang $n = 2, 3$: Siehe (*), c_1, c_2 wurden entsprechend bestimmt.
- Induktionsschritt: Die Aussage gelte für $n-2, n-1$ (IV). Wir zeigen die Aussage für n:

$$\det(B_n) \overset{(c)}{=} 5\det(B_{n-1}) - 4\det(B_{n-2}) \overset{IV}{=} 5\cdot(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cdot 4^{n-1}) - 4\cdot(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cdot 4^{n-2})$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}(5\cdot 4^{n-1} - 4\cdot 4^{n-2}) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cdot 4^n.$$

Aufgabe 52 (Determinanten von linearen Abbildungen, 4 = 3 + 1 Bonuspunkte).
Für einen Vektorraum V über einem Körper K mit $\dim_K(V) < \infty$ und Basis $\mathcal{B}$ definiert man für $f \in End_K(V)$: $\det(f) := \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.
Sei P_2 wie aus Aufgabe A41. Definiere folgende lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über $\mathbb{R}$:

$$f : P_2 \to P_2, \quad p \mapsto [x \mapsto p(3x+2) + p(2x-3),$$
$$g : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2\times 2, \mathbb{R}), \quad A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t),$$
$$h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+3x_2+4x_4 \\ x_1+x_4 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4 \\ 2x_1+3x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten $\det(f)$, $\det(g)$ und $\det(h)$.

(b) Entscheiden Sie jeweils auf Basis von (a), ob f, g, h Isomorphismen sind.

Hinweis: Sie dürfen den Laplace'schen Entwicklungssatz aus P51 verwenden.

Lösung:

(a) Wir bestimmen die Darstellungsmatrizen der jeweiligen linearen Abbildungen bzgl. der Standardbasis.

(i) Wir bestimmen zuerst die Bilder der Basis $B := (p_0, p_1, p_2)$ (mit $p_i(x) = x^i$) unter f und stellen sie in der Basis P dar.

$$\begin{aligned}
(f(p_0))(x) &= 1 + 1 = 2 \implies f(p_0) = 2p_0 \\
(f(p_1))(x) &= (3x+2) + (2x-3) = 5x - 1 \implies f(p_1) = -p_0 + 5p_1 \\
(f(p_2))(x) &= (3x+2)^2 + (2x-3)^2 = 13x^2 + 13 \implies f(p_2) = 13p_0 + 13p_2
\end{aligned}$$

$$\implies M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $M_P^P(f)$ hat bereits eine obere Dreiecksgestalt. Damit gilt

$$\det(f) = \det(M_B^B(f)) = 2 \cdot 5 \cdot 13 = 130.$$

(ii) Wir bestimmen zuerst die Bilder der Basis $E := (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ unter g und stellen sie in der Basis E dar.

$$\begin{aligned}
g(E_{11}) &= \frac{1}{2}(E_{11} + E_{11}^t) = E_{11} \\
g(E_{12}) &= \frac{1}{2}(E_{12} + E_{12}^t) = \frac{1}{2}E_{12} + \frac{1}{2}E_{21} \\
g(E_{21}) &= \frac{1}{2}(E_{21} + E_{21}^t) = \frac{1}{2}E_{12} + \frac{1}{2}E_{21} \\
g(E_{22}) &= \frac{1}{2}(E_{22} + E_{22}^t) = E_{22}
\end{aligned}$$

$$\implies M_E^E(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln direkt nach der 1. Spalte und erhalten

$$\det(g) = \det(M_E^E(g)) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Entwicklung nach der 3. Spalte liefert dann

$$\det(g) = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 0.$$

(iii) Sei $B := (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis. Direktes Ablesen liefert

$$M_B^B(h) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln nach der 3. Spalte und bekommen

$$\det(h) = \det(M_B^B(h)) = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

(hier hätte man natürlich auch direkt die Regel von Sarrus verwenden können)
Entwicklung nach der 2. Spalte liefert

$$\det(h) = (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = -3 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -3.$$

(b) Für alle 3 Aufgaben nutzen wir folgende Argumentation für $f : V \to V$ mit $\dim(V) = n$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in M(n \times n, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\mathrm{Rang}(f)}_{=\dim(\mathrm{Bild}(f))\text{ UVR}} \overset{\text{P44}}{=} \mathrm{Rang}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) = \underbrace{n}_{=\dim(V)} \\
&\overset{\mathrm{Bild}(f)\subset V}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{Bild}(f) = V \\
&\Longleftrightarrow \quad f \text{ surjektiv} \\
&\overset{f:V\to V\text{ linear}}{\Longleftrightarrow} \quad f \text{ bijektiv.}
\end{aligned}$$

Das bedeutet: $\det(f) \neq 0 \Longleftrightarrow f$ Isomorphismus

(i) $\det(f) \neq 0 \Rightarrow f$ Isomorphismus

(ii) $\det(g) = 0 \Rightarrow f$ kein Isomorphismus

(iii) $\det(h) \neq 0 \Rightarrow f$ Isomorphismus

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **31. Januar 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`