UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

13. Abgabeblatt

Aufgabe 49	Aufgabe 50	Aufgabe 51	Aufgabe 52	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 49 (Berechnung von Determinanten, 4 = 3 + 1 Punkte).
Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben seien folgende Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix},$$

wobei $A_6 \in M(n \times n, \mathbb{Q})$.

(a) Berechnen Sie die Determinanten $\det(A_i)$, $i = 1, ..., 6$.
Hinweis für A_6: Multiplizieren Sie zum Beispiel die letzte Zeile zunächst mit n^{-1} und addieren Sie diese Zeile dann geeignet auf die anderen Zeilen, um eine Dreiecksgestalt zu erhalten.

(b) Berechnen Sie unter Nutzung der Ergebnisse aus (a) die Ausdrücke

$$\det((A_4 \cdot A_5)^{-1}), \qquad \det(-2A_4A_5^t), \qquad \det(A_2 \cdot (A_2^{-1} + A_2)).$$

Aufgabe 50 (Determinante als Hilfsmittel, 4 = 1.5 + 0.5 + 1.5 + 0.5 Punkte).
Für $a \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & a & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$, wobei $A := (v_1, v_2, v_3)$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 als Spalten hat.

(b) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ bilden (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$?

(c) Berechnen Sie $\det(B)$.

(d) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ besitzt das LGS $B \cdot x = 0$ keine, eine oder unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 51 (Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes, 4 = 1.5 + 0.5 + 1 + 1 Bonuspunkte).

Für eine Erläuterung des Laplace'schen Entwicklungssatzes siehe P51.
Für $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ definieren wir die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 & 2 & -\lambda \\ \lambda & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 3 & \lambda-3 \\ 2-\lambda & \lambda & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \in M(4\times 4, \mathbb{Q}), \qquad B_n := \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu \\ 0 & \dots & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix} \in M(n\times n, \mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{Q}$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist A invertierbar?

(c) Zeigen Sie, dass B_n folgende Rekursionsgleichung für $\det(B_n)$ für $n \geq 4$ erfüllt:

$$\det(B_n) = \lambda \det(B_{n-1}) - \mu^2 \det(B_{n-2}).$$

Hinweis: Entwickeln Sie B_n zunächst nach der ersten Zeile und eine der beiden resultierenden Matrizen nach der ersten Spalte.

(d) Sei nun $\lambda = 5$, $\mu = -2$. Finden Sie eine Darstellung $\det(B_n) = c_1 \cdot d_1^n + c_2 \cdot d_2^n$ $(n \geq 2)$ mit geeigneten $c_1, d_1, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$. Weisen Sie deren Gültigkeit mit vollständiger Induktion nach.
Hinweis: Setzen Sie zunächst $\det(B_n) = d^n$ in die Rekursionsgleichung ein und ermitteln Sie so die beiden Werte d_1, d_2.

Aufgabe 52 (Determinanten von linearen Abbildungen, 4 = 3 + 1 Bonuspunkte).

Für einen Vektorraum V über einem Körper K mit $\dim_K(V) < \infty$ und Basis $\mathcal{B}$ definiert man für $f \in \mathrm{End}_K(V)$: $\det(f) := \det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f))$. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.
Sei P_2 wie aus Aufgabe A41. Definiere folgende lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : P_2 \to P_2, &\qquad p \mapsto [x \mapsto p(3x+2) + p(2x-3), \\ g : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2\times 2, \mathbb{R}), &\qquad A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t), \\ h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, &\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+3x_2+4x_4 \\ x_1+x_4 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4 \\ 2x_1+3x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten $\det(f)$, $\det(g)$ und $\det(h)$.

(b) Entscheiden Sie jeweils auf Basis von (a), ob f, g, h Isomorphismen sind.

Hinweis: Sie dürfen den Laplace'schen Entwicklungssatz aus P51 verwenden.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **31. Januar 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`