Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

12. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 45	Aufgabe 46	Aufgabe 47	Aufgabe 48	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 45 (Basiswechsel in F_5^n, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
In dieser Aufgabe fassen wir F_5^2 und F_5^3 als F_5-Vektorräume auf. Definiere

$$v_1 := (1,3,1)^t, \qquad v_2 := (1,0,3)^t, \qquad v_3 := (4,2,1)^t,$$

dann ist $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von F_5^3. Seien die linearen Abbildungen $f, g : F_5^3 \to F_5^2$ definiert durch

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \qquad g(v_1) := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g(v_2) := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g(v_3) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie $M_1 := M_{(e_1,e_2)}^{(e_1,e_2,e_3)}(f)$ und $M_{(e_1,e_2)}^{\mathcal{A}}(g)$ an.

(b) Ermitteln Sie $T_{(e_1,e_2,e_3)}^{\mathcal{A}}$ und $T_{\mathcal{A}}^{(e_1,e_2,e_3)}$.

(c) Berechnen Sie $M_{(e_1,e_2)}^{\mathcal{A}}(f)$ und $M_2 := M_{(e_1,e_2)}^{(e_1,e_2,e_3)}(g)$ mittels der Basiswechselformel.

(d) Finden Sie Basen $\mathcal{B}$ von F_5^3 und $\mathcal{C}$ von F_5^2, so dass $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung:

(a) (i) Es gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =: Ax$$

Damit folgt nach Vorlesung direkt:

$$M_{(e_1,e_2)}^{(e_1,e_2,e_3)}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt:

$$M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(g) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi^{-1}_{(e_1,e_2)}(g(v_1)) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2)}(g(v_2)) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2)}(g(v_3)) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Berechnung von $g(v_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ und Darstellung in der Basis (e_1, e_2):

$$\begin{aligned} g(v_1) &= \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 4 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \\ g(v_2) &= \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 \\ g(v_3) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \end{aligned}$$

Dies kann also einfach abgelesen werden.
Damit folgt:

$$M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(g) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) (i) Wir bestimmen $T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)} = M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(\mathrm{id}_{F_5^3})$:
Es gilt:

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)} &= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi^{-1}_{(e_1,e_2,e_3)}(\mathrm{id}_{F_5^3}(v_1)) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2,e_3)}(\mathrm{id}_{F_5^3}(v_2)) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2,e_3)}(\mathrm{id}_{F_5^3}(v_3)) \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi^{-1}_{(e_1,e_2,e_3)}(v_1) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2,e_3)}(v_2) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2,e_3)}(v_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ v_2 &= 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \\ v_3 &= 4 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \end{aligned}$$

Damit folgt direkt:

$$T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies konnte hier wieder direkt abgelesen werden, da der Bildraum mit der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) ausgestattet war.

(ii) Wir bestimmen $T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{A}}$:
Nach Aussage 12.5 gilt $T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{A}} = \left(T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}\right)^{-1}$. Wir bestimmen die Inverse

mittels des Algorithmus aus P38:

$$
\begin{aligned}
T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)} \big| E_3 \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{2Z1+Z2\to Z2,\, 4Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{4Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{4Z2+Z1\to Z1,\, Z3+Z1\to Z1}{\overset{3Z2\to Z2,\, 3Z3\to Z3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = E_3 \big| T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{A}}
\end{aligned}
$$

Damit:

$$
T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
$$

(c) (i) Wir berechnen $M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(f)$:
Es gilt $T^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)} = M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)}(\mathrm{id}_{F_5^2}) = E_2$ (vgl. A44(a)). Damit:

$$
\begin{aligned}
M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(f) &= T^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)} M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2)}(f) T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)} = M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2)}(f) T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(ii) Wir berechnen $M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2)}(g)$:
Es gilt $T^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)} = M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)}(\mathrm{id}_{F_5^2}) = E_2$ (vgl. A44(a)). Damit:

$$
\begin{aligned}
M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2)}(g) &= T^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)} M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(g) T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{A}} = M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(g) T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{A}} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(d) Nach Aussage 11.11 müssen wir Kern und Bild von f bestimmen.
Beachte: Es gilt hier direkt $f = \widetilde{M_1}$ (M_1 ist Darstellungsmatrix von f bzgl. Standardbasen), deswegen muss nicht P44 benutzt werden!

(i) Es gilt $\mathrm{Bild}(\widetilde{M_1}) = \mathrm{Spaltenraum}(M_1)$.
Eine Basis ist $(w_1, w_2) := (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$.
(1. und 3. Spalte von M_1; diese sind offensichtlich linear unabhängig, wegen $\dim(F_5^2) = 2$ also eine Basis).

(ii) Weiter gilt: $\mathrm{Kern}(\widetilde{M_1}) = \mathrm{Lös}(M_1, 0)$.
Bestimmung von $\mathrm{Lös}(M_1, 0)$: Bringe M_1 auf SZFS:

$$
M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \quad \overset{2Z1+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) \quad \overset{2Z2\to Z2,\, 2Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)
$$

Aus der SZSF lesen wir ab: Eine Basis von $\text{Lös}(M_1, 0)$ ist $x_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wähle $u_1 \in \widetilde{M_1}^{-1}(\{w_1\})$, z.B. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (w_1 ist die erste Spalte von M_1).

Analog wähle $u_2 \in \widetilde{M_1}^{-1}(\{w_2\})$, z.B. $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(w_1, w_2) ist bereits Basis von F_5^2 und muss nicht ergänzt werden.
Aussage 11.11 $\Rightarrow$

$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, x_1), \qquad \mathcal{C} = (w_1, w_2)$$

liefern die gewünschte Darstellungsmatrix.

Aufgabe 46 (Basiswechsel im Polynomraum, 4 = 0.5 + 1 + 1 + 1 + 0.5 Punkte). Wir betrachten den Vektorraum P_2 der reellen Polynome mit Grad höchstens 2 über $\mathbb{R}$ aus P46. Seien $p_i, q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $p_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1, 2)$ und

$$q_0(x) = 2 + x, \qquad q_1(x) = -1 + 2x - x^2, \qquad q_2(x) = -2x + x^2.$$

Dann bildet $B = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von P_2. Definiere $B' = (q_0, q_1, q_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von P_2 ist.

Definiere die linearen Abbildungen $f, g : P_2 \to P_2$ durch

$$f(p) = [x \mapsto \frac{1}{2}p(-x-1) - \frac{1}{2}p(x+3) + 2p(x)], \qquad M_B^{B'}(g) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 0 & -3 & 4 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) Ermitteln Sie $M_B^B(f)$.

(c) Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T_B^{B'}$ und $T_{B'}^B$.

(d) Berechnen Sie $M_{B'}^{B'}(f)$ und $M_B^B(g)$ mit Hilfe der Basiswechselformel.

(e) Berechnen Sie $f(q_1)$ und $g(p_1)$ mittels der in (d) bestimmten Darstellungsmatrizen.

Lösung:

(a) *Möglichkeit 1:* Elementares Nachrechnen zum Beispiel der linearen Unabhängigkeit.
Möglichkeit 2 (Nachrechnen im $\mathbb{R}^3$): Vorgehen:

- Zeige, dass $(v_0, v_1, v_2) := (\Phi_B^{-1}(q_0), \Phi_B^{-1}(q_1), \Phi_B^{-1}(q_2))$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ sind.
- Da $\Phi_B : \mathbb{R}^3 \to P_2$ ein Isomorphismus ist, sind damit auch q_0, q_1, q_2 linear unabhängig und damit Basis von P_2 (da $\dim_{\mathbb{R}}(P_2) = 3$).

Berechnung von (v_0, v_1, v_2):

$$q_0 = 2 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \Phi_B^{-1}(q_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$q_1 = -1 \cdot p_0 + 2 \cdot p_1 - 1 \cdot p_2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \Phi_B^{-1}(q_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$q_2 = -2 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \Phi_B^{-1}(q_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um zu prüfen, ob (v_0, v_1, v_2) linear unabhängig ist, gibt es 2 Möglichkeiten, welche auf dieselbe Rechnung hinauslaufen:

(1) Bestimme mittels des Gauß-Algorithmus eine Basis von $U = \operatorname{Lin}(v_0, v_1, v_2)$, d.h. bringe

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

auf Zeilenstufenform.
Erhält man 3 Nicht-Nullzeilen, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$ und damit ist (v_0, v_1, v_2) eine Basis.

(2) Seien $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Dies ist äquivalent zum Finden von $\text{Lös}(A, 0)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bringe A auf Zeilenstufenform. Erhält man 3 Nicht-Nullzeilen, so ist $\text{Lös}(A, 0) = \{0\}$, d.h. dann folgt $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Wir zeigen hier nur Ansatz (1):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z1 \leftrightarrow Z2}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{2Z1+Z2 \to Z2}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{2}{5}Z2+Z3 \to Z3}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Aus der ZSF lesen wir ab: $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$ und damit ist (v_0, v_1, v_2) eine Basis.

(b) Es gilt:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(f(p_0)) & \Phi_B^{-1}(f(p_1)) & \Phi_B^{-1}(f(p_2)) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Berechnung von $f(p_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ und Darstellung in der Basis B:

$$\begin{aligned} (f(p_0))(x) &= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2, \\ (f(p_1))(x) &= \frac{1}{2}(-x-1) - \frac{1}{2}(x+3) + 2x = -2 + x, \\ (f(p_2))(x) &= \frac{1}{2}(-x-1)^2 - \frac{1}{2}(x+3)^2 + 2x^2 = -4 - 2x + 2x^2 \end{aligned}$$

Daher erhalten wir:

$$f(p_0) = 2p_0, \quad f(p_1) = -2p_0 + p_1, \quad f(p_2) = -4p_0 - 2p_1 + 2p_2$$

Damit folgt:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) • Wir bestimmen $T_B^{B'} = M_B^{B'}(\mathrm{id}_{P_2})$:
Es gilt:

$$T_B^{B'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(\mathrm{id}_{P_2}(q_0)) & \Phi_B^{-1}(\mathrm{id}_{P_2}(q_1)) & \Phi_B^{-1}(\mathrm{id}_{P_2}(q_2)) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(q_0) & \Phi_B^{-1}(q_1) & \Phi_B^{-1}(q_2) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Berechnung von $f(p_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ und Darstellung in der Basis B:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathrm{id}_{P_2}(q_0) & = & 2p_0 & + & p_1, & & \\ \mathrm{id}_{P_2}(q_1) & = & -1p_0 & + & 2p_1 & - & p_2, \\ \mathrm{id}_{P_2}(q_2) & = & & - & 2p_1 & + & p_2 \end{array}$$

Damit folgt direkt:

$$T_B^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Wir bestimmen $T_{B'}^B$:
Nach Aussage 12.5 gilt $T_{B'}^B = \left(T_B^{B'}\right)^{-1}$. Wir bestimmen die Inverse mittels des Algorithmus aus P38:

$$\begin{aligned} T_B^{B'} \big| E_3 \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \overset{Z1 \leftrightarrow Z2, (-2)Z1+Z2 \to Z2}{\rightsquigarrow} \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \underset{5Z2+Z3 \to Z3, (-2)Z2+Z1 \to Z1}{\overset{Z2 \leftrightarrow Z3, (-1)Z2 \to Z2}{\rightsquigarrow}} \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \\ \overset{(-1)Z3 \to Z3, Z3+Z2 \to Z2}{\rightsquigarrow} \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) = E_3 \big| T_{B'}^B \end{aligned}$$

Damit:

$$T_{B'}^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(d) • Bestimme $M_{B'}^{B'}(f)$:

$$\begin{aligned} M_{B'}^{B'}(f) &= T_{B'}^B \cdot M_B^B(f) \cdot T_B^{B'} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• Bestimme $M_B^B(g)$:
Es gilt $T_B^B = M_B^B(\mathrm{id}_{P_2}) = E_3$ (vgl. A44(a)). Damit:

$$\begin{aligned} M_B^B(g) &= T_B^B \cdot M_B^{B'}(g) \cdot T_{B'}^B = M_B^{B'}(g) \cdot T_{B'}^B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & -14 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e) • Es folgt:

$$f(q_1) = (\Phi_{B'} \circ \widetilde{M_{B'}^{B'}(f)} \circ \Phi_{B'}^{-1})(q_1) = (\Phi_{B'} \circ \widetilde{M_{B'}^{B'}(f)})(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$$
$$= \Phi_{B'}(M_{B'}^{B'}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = \Phi_{B'}(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = 2q_1$$

• Es gilt:

$$g(p_1) = (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(g)} \circ \Phi_B^{-1})(p_1) = (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(g)})(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$$
$$= \Phi_B(M_B^B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = \Phi_B(\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)) = -4p_0 - 3p_1 + 2p_2$$

Aufgabe 47 (Angabe von linearen Abbildungen mittels Darstellungsmatrix, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei V ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Ferner sei $f \in \mathrm{End}(V)$ gegeben über die Darstellungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) := \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & -4 \end{smallmatrix}\right).$$

Weiterhin seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ definiert durch:

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_2) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_3) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \quad \in \quad \mathbb{Q}^3$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ unter Nutzung der Basiswechselformel.
Hinweis: Falls Sie Matrizen invertieren müssen, können Sie dafür ein Computer-Algebra-System nutzen.

(c) Finden Sie zwei Basen $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ von V, so dass $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} E_{\mathrm{Rang}(f)} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die Elemente von $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ sollen in der Form $\Phi_B(c)$ mit geeigneten $c \in \mathbb{Q}^3$ angegeben werden.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass $(u_1, u_2, u_3) := (\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_1), \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_2), \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_3))$ eine Basis in $\mathbb{Q}^3$ ist.
$\overset{\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{Q}^3 \to V \text{ Isomorphismus}}{\Longrightarrow}$ (v_1, v_2, v_3) ist Basis von V.
Detaillierte Argumentation (nicht verlangt) vergleiche Aufgabe 46(a).
Schreibe (u_1, u_2, u_3) als Zeilen in eine Matrix und bilde die Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \overset{(-2)Z1+Z2\to Z2, Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \overset{\frac{8}{7}Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt: $U = \mathrm{Lin}(u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{Q}^3$ erfüllt $\dim_{\mathbb{Q}}(U) = 3 \Rightarrow U = \mathbb{Q}^3 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ Basis von $\mathbb{Q}^3$.

(b) Transformationsformel $\Rightarrow$

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Wir berechnen $T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$:

• Berechnung von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$:
Herleitung (nicht verlangt):
Möglichkeit 1: Gegeben ist für $i = 1, 2, 3$:

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i) \overset{\mathcal{B}'=(v_1,v_2,v_3)}{=} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}(e_i) \overset{\text{Def. } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}{=} T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} e_i \overset{\text{Matrixmult.}}{=} i\text{-te Spalte von } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Möglichkeit 2: Wegen $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ gilt:

$$T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v_1) & \Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v_2) & \Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich die Matrix $T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ direkt aus den gegebenen $\Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v_i)$, $i = 1, 2, 3$ ablesen:

$$T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Berechnung von $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$:
  Es gilt (vgl. Aussage 12.5):
  $$T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = (T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}})^{-1}$$
  Berechnung des Inversen von $T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ mittels Aufgabe P38:

$$\begin{aligned}
T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} | E_3 \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-3)Z1+Z2\to Z2,(-1)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)Z3+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z2\to Z2,3Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{1}{4}Z3\to Z3,(-2)Z2+Z1\to Z1,Z3+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

  Also gilt:
  $$T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -9 \\ 4 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt folgt damit:

$$\begin{aligned}
M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \quad &= \quad T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -9 \\ 4 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Laut 11.11 sind Basen von Kern(f) und Bild(f) zu bestimmen.
Da f nicht direkt bekannt ist, nutzen wir Darstellungsmatrizen von f und Aufgabe P44. Die Bestimmung von Kern und Bild ist leichter, je leichter (d.h. je mehr Nullen, nettere Zahlen) die Darstellungsmatrix ist. Daher nehmen wir $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$. Wir wenden zunächst die Ergebnisse von 11.11 direkt auf $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ an und übertragen sie dann auf f.

- Es gilt $\operatorname{Bild}(\widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)}) = \operatorname{Spaltenraum}(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f))$.

  Eine Basis ist $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) := (\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$, diese kann durch $\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{Q}^3$ ergänzt werden.

- Es gilt $\operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Kern}(\widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)}) = \text{Lös}(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f), 0)$. Bestimmung von $\text{Lös}(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f), 0)$ mittels Gauß-Algorithmus:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \overset{(-1)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

  Aus SZFS lesen wir ab: Eine Basis von $\text{Lös}(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f), 0)$ ist $\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

  Wähle $\tilde{u}_1 \in \widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)}^{-1}(\tilde{w}_1)$, z.B. $\tilde{u}_1 = e_1$ ($\tilde{w}_1$ ist 1. Spalte von $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$), analog $\tilde{u}_2 \in \widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)}^{-1}(\tilde{w}_2)$, z.B. $\tilde{u}_2 = e_2$.

Definiere:

$$w_i := \Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{w}_i), \quad x_i := \Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{x}_i), \quad u_i := \Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{u}_i).$$

- Wegen P44 gilt: $\operatorname{Bild}(f) = \Phi_{\mathcal{B}'}(\operatorname{Bild}(\widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)}))$.
  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ Basis von $\operatorname{Bild}(\widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)})$, $\Phi_{\mathcal{B}'}$ Isomorphismus $\Rightarrow$ (w_1, w_2) Basis von $\operatorname{Bild}(f)$, (w_1, w_2, w_3) Basis von V.

- Wegen P44 gilt: $\operatorname{Kern}(f) = \Phi_{\mathcal{B}'}(\operatorname{Kern}(\widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)}))$.
  $(\tilde{x}_1)$ Basis von $\operatorname{Kern}(\widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)})$, $\Phi_{\mathcal{B}'}$ Isomorphismus $\Rightarrow$ (x_1) Basis von $\operatorname{Kern}(f)$.
  $f = \Phi_{\mathcal{B}'} \circ \widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}$, $\tilde{u}_i \in \widetilde{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)}^{-1}(\tilde{w}_i) \Rightarrow u_i \in f^{-1}(w_i)$.

Die gesuchten Basen sind also: $\mathcal{C} = (u_1, u_2, x_1)$, $\mathcal{C}' = (w_1, w_2, w_3)$.
Der folgende Schritt wäre als einziges nicht nötig gewesen, wenn wir statt mit $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ mit $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ gearbeitet hätten.
Wegen

$$\tilde{w}_i = \Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{w}_i) \overset{\tilde{T}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\Phi_{\mathcal{B}'}}{=} \Phi_{\mathcal{B}}(T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\tilde{w}_i)$$

usw. erhalten wir:

$$w_1 = \Phi_{\mathcal{B}}(T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\tilde{w}_1) = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}), \quad w_2 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}), \qquad w_3 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}),$$

und

$$x_1 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}), \quad u_1 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}), \quad u_2 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}).$$

Aufgabe 48 (Spurabbildung, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
Die Spurabbildung ist definiert durch die lineare Abbildung

$$\operatorname{Sp}: M(n\times n, K) \to K, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Im Folgenden seien $A, B \in M(n\times n, K)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Sp}(A \cdot B) = \mathrm{Sp}(B \cdot A)$.

(b) Ist $A \approx B$ (d.h. A, B ähnlich), so folgt $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(c) Ist V endlichdimensional und $\mathcal{B}$ eine Basis, so definiert man für $f : V \to V$ linear: $\mathrm{Sp}(f) := \mathrm{Sp}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(f)$ wohldefiniert ist (d.h. nicht von $\mathcal{B}$ abhängt).

Für den Körper K gelte nun: $\underbrace{1 + ... + 1}_{n\text{-mal}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie: Gibt es lineare $f, g : V \to V$ mit $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_V$, so ist V nicht endlich-dimensional. *Hinweis: Wenden Sie Sp(...) auf die gegebene Gleichung an.*

Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathrm{Sp}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} (A \cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (B \cdot A)_{kk} = \mathrm{Sp}(B \cdot A).$$

(b) Es sei $A \approx B$.
$\Longrightarrow$ Es gibt $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $A = SBS^{-1}$.
$\Longrightarrow$ $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}((SB)S^{-1}) \overset{(a)}{=} \mathrm{Sp}(S^{-1}(SB)) = \mathrm{Sp}(E_n \cdot B) = \mathrm{Sp}(B)$.

(c) Wir zeigen: Ist B' eine weitere Basis, so ist $\mathrm{Sp}(M_{B'}^{B'}(f)) = \mathrm{Sp}(M_B^B(f))$.
Sei B' eine weitere Basis, so gilt

$$M_{B'}^{B'}(f) = T_{B'}^{B} \cdot M_B^B(f) \cdot \underbrace{T_B^{B'}}_{=(T_{B'}^{B})^{-1}},$$

d.h. $M_{B'}^{B'}(f) \approx M_B^B(f)$.
(c) $\Rightarrow$ $\mathrm{Sp}(M_{B'}^{B'}(f)) = \mathrm{Sp}(M_B^B(f))$.

(d) Falls V endlich-dimensional, so gibt es eine Basis $B = (v_1, ..., v_n)$. Aus $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_V$ folgt dann

$$E_n = M_B^B(\mathrm{id}_V) = M_B^B(f \circ g - g \circ f) = M_B^B(f \circ g) - M_B^B(g \circ f) = M_B^B(f) \cdot M_B^B(g) - M_B^B(g) \cdot M_B^B(f).$$

Anwendung von Sp:

$$\begin{aligned} n &= \mathrm{Sp}(E_n) = \mathrm{Sp}(M_B^B(f) \cdot M_B^B(g) - M_B^B(g) \cdot M_B^B(f)) \\ &= \mathrm{Sp}(M_B^B(f) \cdot M_B^B(g)) - \mathrm{Sp}(M_B^B(g) \cdot M_B^B(f)) = 0 \end{aligned}$$

nach (b); Widerspruch zur Voraussetzung.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **24. Januar 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`