UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

12. Abgabeblatt

Aufgabe 45	Aufgabe 46	Aufgabe 47	Aufgabe 48	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 45 (Basiswechsel in F_5^n, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
In dieser Aufgabe fassen wir F_5^2 und F_5^3 als F_5-Vektorräume auf. Definiere

$$v_1 := (1,3,1)^t, \qquad v_2 := (1,0,3)^t, \qquad v_3 := (4,2,1)^t,$$

dann ist $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von F_5^3. Seien die linearen Abbildungen $f, g : F_5^3 \to F_5^2$ definiert durch

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \qquad g(v_1) := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g(v_2) := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g(v_3) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie $M_1 := M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2)}(f)$ und $M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(g)$ an.

(b) Ermitteln Sie $T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}$ und $T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{A}}$.

(c) Berechnen Sie $M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(f)$ und $M_2 := M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2)}(g)$ mittels der Basiswechselformel.

(d) Finden Sie Basen $\mathcal{B}$ von F_5^3 und $\mathcal{C}$ von F_5^2, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 46 (Basiswechsel im Polynomraum, 4 = 0.5 + 1 + 1 + 1 + 0.5 Punkte).
Wir betrachten den Vektorraum P_2 der reellen Polynome mit Grad höchstens 2 über $\mathbb{R}$ aus P46. Seien $p_i, q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $p_i(x) = x^i$ $(i = 0,1,2)$ und

$$q_0(x) = 2 + x, \qquad q_1(x) = -1 + 2x - x^2, \qquad q_2(x) = -2x + x^2.$$

Dann bildet $B = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von P_2. Definiere $B' = (q_0, q_1, q_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von P_2 ist.

Definiere die linearen Abbildungen $f, g : P_2 \to P_2$ durch

$$f(p) = [x \mapsto \frac{1}{2}p(-x-1) - \frac{1}{2}p(x+3) + 2p(x)], \qquad M^{B'}_{B}(g) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 0 & -3 & 4 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) Ermitteln Sie $M^B_B(f)$.

(c) Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T^{B'}_B$ und $T^B_{B'}$.

(d) Berechnen Sie $M^{B'}_{B'}(f)$ und $M^B_B(g)$ mit Hilfe der Basiswechselformel.

(e) Berechnen Sie $f(q_1)$ und $g(p_1)$ mittels der in (d) bestimmten Darstellungsmatrizen.

Aufgabe 47 (Angabe von linearen Abbildungen mittels Darstellungsmatrix, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei V ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Ferner sei $f \in \mathrm{End}(V)$ gegeben über die Darstellungsmatrix

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ definiert durch:

$$\Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{Q}^3$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ unter Nutzung der Basiswechselformel.
Hinweis: Falls Sie Matrizen invertieren müssen, können Sie dafür ein Computer-Algebra-System nutzen.

(c) Finden Sie zwei Basen $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ von V, so dass $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{Rang}(f)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Elemente von $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ sollen in der Form $\Phi_B(c)$ mit geeigneten $c \in \mathbb{Q}^3$ angegeben werden.

Aufgabe 48 (Spurabbildung, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
Die Spurabbildung ist definiert durch die lineare Abbildung

$$\mathrm{Sp} : M(n \times n, K) \to K, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Im Folgenden seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Sp}(A \cdot B) = \mathrm{Sp}(B \cdot A)$.

(b) Ist $A \approx B$ (d.h. A, B ähnlich), so folgt $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(c) Ist V endlichdimensional und $\mathcal{B}$ eine Basis, so definiert man für $f : V \to V$ linear: $\mathrm{Sp}(f) := \mathrm{Sp}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f))$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(f)$ wohldefiniert ist (d.h. nicht von $\mathcal{B}$ abhängt).

Für den Körper K gelte nun: $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie: Gibt es lineare $f, g : V \to V$ mit $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_V$, so ist V nicht endlich-dimensional. *Hinweis: Wenden Sie Sp(...) auf die gegebene Gleichung an.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **24. Januar 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`