Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

11. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 41	Aufgabe 42	Aufgabe 43	Aufgabe 44	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 41 (Darstellungsmatrizen für Abbildungen zwischen Polynomräumen, 4 = 1 + 0.5 + 1 + 1 + 0.5 Punkte).

Für $D \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Vektorraum der Polynome

$$P_D = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists a_0, ..., a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{D} a_k x^k\}$$

über $\mathbb{R}$. Seien $p_i, q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, ..., D)$ definiert durch

$$p_i(x) = x^i, \qquad q_i(x) = (x+1)^i.$$

Dann sind $B_D = (p_0, ..., p_D)$ und $B'_D = (q_0, ..., q_D)$ Basen von P_D.

(a) Geben Sie die Abbildungen $\Phi_{B'_2}$ und $\Phi_{B'_2}^{-1}$ an.
Hinweis: Bei $\Phi_{B'_2}^{-1}$ soll also $\Phi_{B'_2}^{-1}(p)$ für alle $p \in P_2$ mit $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ angegeben werden.

(b) Sei $w \in P_2$ gegeben durch $w(x) = 1 + x + x^2$. Geben Sie die Koordinaten von w bzgl. B'_2 an.

Im Folgenden betrachten wir die linearen Abbildungen

$$f : P_2 \to \mathbb{R}^2, p \mapsto \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{pmatrix}, \qquad g : P_2 \to P_2, p \mapsto [x \mapsto p(x+1)]$$

(c) Berechnen Sie $M_{(e_1,e_2)}^{B_2}(f)$ und $M_{B'_2}^{B_2}(g)$.

(d) Ermitteln Sie $\text{Kern}(f)$ und $\dim_{\mathbb{R}}\text{Kern}(f)$ unter Verwendung von $M_{(e_1,e_2)}^{B_2}(f)$ und Aufgabe P44.

(e) Zeigen Sie mittels Aufgabe P44, dass g bijektiv ist.

Lösung:

(a) (i) Wir bestimmen $\Phi_{B_2'}$:

$$\Phi_{B_2'}: \mathbb{R}^3 \to P_2, \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$$

(ii) Wir bestimmen $\Phi_{B_2'}^{-1}$:
Sei $p \in P_2$. $\implies \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}: p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.
Suche $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)^t \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = \Phi_{B_2'}((\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)^t) \overset{!}{=} p,$$

Dies ist äquivalent zu: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$[\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2]+[\lambda_1+2\lambda_2]x+\lambda_2 x^2 = \lambda_0+\lambda_1(x+1)+\lambda_2(x+1)^2 \overset{!}{=} p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2.$$

Da (p_0, p_1, p_2) eine Basis ist, ist die äquivalent zu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_0 & = & \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 \\ a_1 & = & & & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 \\ a_2 & = & & & & & \lambda_2 \end{array}$$

Daher lösen wir folgendes LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array}\right) \overset{-Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a_0 - a_1 \\ 0 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array}\right)$$
$$\overset{-2Z3+Z2\to Z2, Z3+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_0 - a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 - 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array}\right)$$

Daher:

$$\Phi_{B_2'}^{-1}: P_2 \to \mathbb{R}^3, \quad p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 - a_1 + a_2 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt $w = 1 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2$, also $a_0 = 1, a_1 = 1$ und $a_2 = 2$. Daher erhalten wir

$$\Phi_{B_2'}^{-1}(w) \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} 1-1+1 \\ 1-2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt:

$$M_{(e_1,e_2)}^{B_2}(f) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_{(e_1,e_2)}^{-1}(f(p_0)) & \Phi_{(e_1,e_2)}^{-1}(f(p_1)) & \Phi_{(e_1,e_2)}^{-1}(f(p_2)) \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Berechnung von $f(p_i)$ und Darstellung in der Basis (e_1, e_2):

$$\begin{array}{rcl} f(p_0) & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = e_1 + e_2, \\ f(p_1) & = & \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -e_1 + e_2, \\ f(p_2) & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = e_1 + e_2. \end{array}$$

$\implies M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$M^{B_2}_{B_2'}(g) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi^{-1}_{B_2'}(g(p_0)) & \Phi^{-1}_{B_2'}(g(p_1)) & \Phi^{-1}_{B_2'}(g(p_2)) \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Berechnung von $g(p_i)$ und Darstellung in der Basis $B_2' = (q_0, q_1, q_2)$:

$$\begin{aligned} (g(p_0))(x) &= 1 = q_0(x) \implies g(p_0) = q_0, \\ (g(p_1))(x) &= x + 1 = q_1(x) \implies g(p_1) = q_1, \\ (g(p_2))(x) &= (x+1)^2 = q_2(x) \implies g(p_2) = q_2. \end{aligned}$$

$\implies M^{B_2}_{B_2'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Aufgabe P44(a):

$$\mathrm{Kern}(f) = \Phi_{B_2}(\mathrm{Kern}(\widetilde{M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f)})). \quad (*)$$

Zu bestimmen ist also $\mathrm{Kern}(\widetilde{M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f)}) = \mathrm{Lös}(M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f), 0)$.
Wir bringen zunächst die Matrix $M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f)$ in strenge Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f) \quad &\overset{-Z1+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\overset{(1/2)Z2\to Z2, Z2+Z1\to Z1)}{\rightsquigarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f)' \end{aligned}$$

Die Position der Pivotelemente ist gegeben über $(j_1, j_2) = (1, 2)$. Sei B die Matrix, welche durch Streichen der Spalten j_1, j_2 von $M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f)'$ hervorgeht. Eine Basis von $\mathrm{Lös}(M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f), 0)$ ist dann gegeben durch $w \in \mathbb{R}^3$, wobei

$$\begin{pmatrix} w_{j_1} \\ w_{j_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -B$$

und

$$w_3 = e_1 = (1) \in \mathbb{R}.$$

$\implies \mathrm{Lös}(M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f), 0) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{Lin}(w)$
$\implies$

$$\mathrm{Kern}(f) \overset{(*)}{=} \Phi_{B_2}(\mathrm{Lin}(w)) = \mathrm{Lin}(\Phi_{B_2}(w)) = \mathrm{Lin}(-p_0 + p_2).$$

$\implies \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Kern}(f) = 1$

(e) Aufgabe P44(d) liefert:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Kern}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Kern}(\widetilde{M^{B_2}_{B_2'}(g)}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lös}(M^{B_2}_{B_2'}(g), 0) = 3 - \mathrm{Rang}(M^{B_2}_{B_2'}(g)) = 0.$$

(Offensichtlich ist $M^{B_2}_{B_2'}(g)$ bereits in ZSF.) $\implies g$ ist injektiv
$\dim_{\mathbb{R}}(P_2) = \dim_{\mathbb{R}}(P_2) \implies g$ ist Isomorphismus (also bijektiv, Korollar 9.16).

Aufgabe 42 (Darstellungsmatrizen in $\mathbb{R}^3$, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Wir fassen $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$$

und die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t$. Dann bildet $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Sei $w = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Berechnen Sie die Koordinaten von w bzgl. B, d.h. geben Sie $\Phi_B^{-1}(w)$ an.

(b) Bestimmen Sie $M_{(e_1,e_2,e_3)}^{(e_1,e_2,e_3)}(f)$, $M_B^B(f)$ und $M_B^{(e_1,e_2,e_3)}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
Hinweis: Es gilt $e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$ *und* $e_2 = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$.

(c) Berechnen Sie $f(w)$ einmal direkt und einmal mittels $f = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$.

Lösung:

(a) Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$w \overset{!}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A:=} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\lambda:=} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b:=}$$

Zur Lösung des LGS bringen wir $A|b$ auf strenge Zeilenstufenform:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{-Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{-Z2+Z3\to Z3, (-1/2)Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{(-3)Z3+Z2\to Z2, -Z3+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

$\Longrightarrow w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{5}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$

$\Longrightarrow \Phi_B^{-1}(w) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) (i) Offensichtlich ist $f = \tilde{A}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Laut Vorlesung gilt direkt:

$$M_{(e_1,e_2,e_3)}^{(e_1,e_2,e_3)}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(f(v_1)) & \Phi_B^{-1}(f(v_2)) & \Phi_B^{-1}(f(v_3)) \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Bestimmung von $f(v_i)$ und Darstellung in Basis B:

$$\begin{array}{rcrcl} f(v_1) & = & v_1 & = & 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ f(v_2) & = & v_2 & = & 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ f(v_3) & = & -v_3 & = & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 1 \cdot v_3 \end{array}$$

Daher:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gilt (mit $g := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$):

$$M_B^{(e_1,e_2,e_3)}(g) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(g(e_1)) & \Phi_B^{-1}(g(e_2)) & \Phi_B^{-1}(g(e_3)) \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Hier ist (laut Hinweis):

$$\begin{array}{rcl} g(e_1) & = & e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 \quad (*) \\ g(e_2) & = & e_2 = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 \quad (**) \\ g(e_3) & = & e_3. \end{array}$$

Wir benötigen noch eine Darstellung

$$g(e_3) = e_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dies ist äquivalent zum LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{-Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-Z2+Z3\to Z3, (-1/2)Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{(-3)Z3+Z2\to Z2, -Z3+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right),$$

d.h.

$$g(e_3) = e_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 \quad (***)$$

Ablesen aus (*),(**),(***):

$$M_B^{(e_1,e_2,e_3)}(g) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) (i) Berechne $f(w)$ direkt:

$$f(w) = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 3-2+3 \\ 2-2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Berechne $f(w)$ mittels angegebener Formel:

$$f(w) = (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1})(w) = (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)})(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) = \Phi_B(M_B^B(f)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix})$$

$$= \Phi_B(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}) = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{5}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 43 (Darstellungsmatrizen im Matrizenraum, 4 = 0.5 + 1 + 1 + 1.5 Punkte).

Wir definieren die lineare Abbildung

$$f : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2\times 2, \mathbb{R}),\ X \mapsto \frac{1}{2}(X - X^t)$$

zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $M(2\times 2, \mathbb{R})$. Weiter seien

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ eine Basis von $M(2\times 2, \mathbb{R})$.

(a) Geben Sie die Koordinaten von $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bzgl. B an.

(b) Berechnen Sie $M_B^B(f)$.

(c) Berechnen Sie $f(M)$ einmal direkt und einmal unter Verwendung von $M_B^B(f)$.

(d) Berechnen Sie Kern(f) und Bild(f) mit Hilfe von $M_B^B(f)$ und P44.

Lösung:

(a) Wir suchen $\lambda_1, ..., \lambda_4 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M \overset{!}{=} \Phi_B((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^t) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

Die vier Komponenten liefern das LGS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{Z2+Z3\to Z3,(1/2)Z3\to Z3,-Z3+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow\ M = 1\cdot M_1 + 0\cdot M_2 + 1\cdot M_3 + 1\cdot M_4$
Bemerkung: Hier hätten wir die Koordinaten aufgrund der einfachen Gestalt von M auch direkt angegeben können.

$$\Longrightarrow\ \Phi_B^{-1}(M) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

(b) Es gilt:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(M_1) & \Phi_B^{-1}(M_2) & \Phi_B^{-1}(M_3) & \Phi_B^{-1}(M_4) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen $f(M_i)$ und stellen diese in der Basis $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ dar:

$$\begin{aligned}
f(M_1) &= \frac{1}{2}(M_1 - M_1^t) = \frac{1}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) = 0\\
f(M_2) &= \frac{1}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right) = M_2 = 0\cdot M_1 + 1\cdot M_2 + 0\cdot M_3 + 0\cdot M_4\\
f(M_3) &= \frac{1}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right) = 0\\
f(M_4) &= \frac{1}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ M_B^B(f) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(c) (i) Wir berechnen $f(M)$ direkt:

$$f(M) = \frac{1}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\right) = 0$$

(ii) Wir berechnen $f(M)$ mittels $f = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$:

$$\begin{aligned}
f(M) &= (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1})(M) \overset{\text{(a)}}{=} (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)})\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \Phi_B\left(M_B^B(f)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \Phi_B\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0
\end{aligned}$$

(d) (i) Aufgabe P44 (a) liefert:

$$\mathrm{Kern}(f) = \Phi_B(\mathrm{Kern}(\widetilde{M_B^B(f)})) = \Phi_B(\mathrm{Lös}(M_B^B(f), 0)).$$

Es ist also $\mathrm{Lös}(M_B^B(f), 0)$ zu bestimmen. Es gilt:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} =: Z$$

Die Position der Pivotelemente ist gegeben über $j_1 = 2$. Sei F die Matrix, welche durch Steichen der Spalte j_1 und aller Nullzeilen von Z hervorgeht, d.h.

$$F = \begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$$

Eine Basis von $\mathrm{Lös}(M_B^B(f), 0)$ ist dann gegeben durch (w_1, w_2, w_3), wobei

- $(w_{1j_1}) = w_{12} = 1$. Spalte von $-F$ und $(w_{11}, w_{13}, w_{14}) = e_1 \in \mathbb{R}^3$,
- $(w_{2j_1}) = w_{22} = 1$. Spalte von $-F$ und $(w_{21}, w_{23}, w_{24}) = e_2 \in \mathbb{R}^3$,
- $(w_{3j_1}) = w_{32} = 1$. Spalte von $-F$ und $(w_{31}, w_{33}, w_{34}) = e_3 \in \mathbb{R}^3$.

$\implies \text{Lös}(M_B^B(f), 0) = \text{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}) = \text{Lin}(w_1, w_2, w_3)$.

Es folgt:

$\text{Kern}(f) = \Phi_B(\text{Lin}(w_1, w_2, w_3)) = \text{Lin}(\Phi_B(w_1), \Phi_B(w_2), \Phi_B(w_3)) = \text{Lin}(M_1, M_3, M_4)$.

$\implies \dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(f) = 3$

(a) Aufgabe P44 (b) liefert:

$$\text{Bild}(f) = \Phi_B(\text{Bild}(\widetilde{M_B^B(f)})).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Bild}(\widetilde{M_B^B(f)}) &= \widetilde{M_B^B(f)}(\mathbb{R}^4) = \text{Spaltenraum}(M_B^B(f)) \\
&= \text{Lin}(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}) \\
&= \text{Lin}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix})
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\text{Bild}(f) = \Phi_B(\text{Bild}(\widetilde{M_B^B(f)})) = \Phi_B(\text{Lin}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix})) = \text{Lin}(\Phi_B(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix})) = \text{Lin}(M_2).$$

$\implies \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(f)) = 1$

Aufgabe 44 (Rechnen mit Darstellungsmatrizen, 4 = 0.5 + 1.5 + 1 + 1 Punkte).
Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$, $g : U \to V$ lineare Abbildungen. Seien $A = (u_1, ..., u_r)$, $B = (v_1, ..., v_s)$, $C = (w_1, ..., w_t)$ Basen von U, V, W. Zeigen Sie:

(a) $M_B^B(\text{id}_V) = E_s$.

(b) $M_C^A(f \circ g) = M_C^B(f) \cdot M_B^A(g)$.

(c) Falls f ein Isomorphismus ist (und daher $s = t$), gilt $M_B^C(f^{-1}) = (M_C^B(f))^{-1}$.

Es sei nun $V = W$ und $B = (v_1, v_2)$. f sei gegeben mittels $M_B^B(f) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{smallmatrix}\right)$.

(d) Schreiben Sie $f(v_1 + v_2)$ als Linearkombinationen von v_1, v_2.

Lösung:
Wir nutzen jeweils die definierende Eigenschaft der Koordinatenmatrizen, um die Aussagen zu zeigen.

(a) Sei $j \in \{1, ..., s\}$. Dann gilt:
$\text{id}_V(v_j) = v_j = \sum_{i=1}^s (E_s)_{ij} v_i$.
$\Rightarrow M_B^B(\text{id}_V) = E_s$.

(b) Sei $j \in \{1, ..., r\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(u_j) &= f(g(u_j)) = f(\sum_{i=1}^{s} (M_B^A(g))_{ij} v_i) \\
&\overset{f \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{s} (M_B^A(g))_{ij} \underbrace{f(v_i)}_{=\sum_{k=1}^{t} (M_C^B(f))_{ki} w_k} \\
&= \sum_{k=1}^{t} \Big[\sum_{i=1}^{s} (M_C^B(f))_{ki} (M_B^A(g))_{ij} \Big] w_k.
\end{aligned}$$

Es folgt (Def. Matrixmultiplikation):

$$(M_C^A(f \circ g))_{kj} = \sum_{i=1}^{s} (M_C^B(f))_{ki} (M_B^A(g))_{ij} = (M_C^B(f) \cdot M_B^A(g))_{kj}.$$

(c) Wegen $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ gilt:

$$E_s \overset{(a)}{=} M_B^B(\mathrm{id}_V) = M_B^B(f^{-1} \circ f) \overset{(b)}{=} M_B^C(f^{-1}) \cdot M_C^B(f)$$

Da $M_B^C(f^{-1}), M_C^B(f) \in K^{s \times s}$, folgt mit Satz 11.8 (dieser besagt, dass bei Matrizen ein linksinverses Element bereits ein inverses Element ist) die Behauptung.

(d) Es ist

$$v_1 + v_2 = \Phi_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Es gilt $f \circ \Phi_B = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)}$, damit folgt:

$$\begin{aligned}
f(v_1 + v_2) &= f(\Phi_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})) = \Phi_B\Big(\widetilde{M_B^B(f)}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})\Big) \\
&= \Phi_B\Big(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) = \Phi_B\Big(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Big) = 3v_1 + 7v_2.
\end{aligned}$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **17. Januar 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

11. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P41 (Darstellungsmatrix für Abbildungen zwischen Polynomräumen).
Für $D \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Vektorraum der Polynome

$$P_D = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists a_0, ..., a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{D} a_k x^k\}$$

über $\mathbb{R}$. Für $i = 0, ..., D$ sei $p_i \in P_D$ mit $p_i(x) := x^i$. Es ist bekannt, dass $B_D = (p_0, ..., p_D)$ eine Basis von P_D bildet. Gegeben seien die beiden linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f : P_3 \to P_2, &\qquad p \mapsto [x \mapsto (x+1) \cdot p'(x) - 3p(x)], \\ g : P_2 \to P_2, &\qquad p \mapsto [x \mapsto p(x) \cdot (x+1) - p(x+1) \cdot x]. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie Φ_{B_3} und $\Phi_{B_3}^{-1}$ an.

(b) Sei $p \in P_3$ definiert durch $p(x) = 2x^3 - 3x + 2$. Geben Sie die Koordinaten von p bzgl. B_3 an, d.h. bestimmen Sie $\Phi_{B_3}^{-1}(p)$.

(c) Bestimmen Sie $M_{B_2}^{B_3}(f)$ und $M_{B_2}^{B_2}(g)$.

(d) Berechnen Sie $f(p)$ einmal direkt und einmal mittels $f = \Phi_{B_2} \circ \widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)} \circ \Phi_{B_3}^{-1}$.

(e) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}\text{Kern}(f)$ und $\text{Kern}(f)$ mittels Aufgabe P44.

(f) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}\text{Bild}(g)$ und $\text{Bild}(g)$ mittels Aufgabe P44.

Lösung:

(a) (i) Wir bestimmen Φ_B:
Es gilt $\Phi_{B_3}(e_i) = p_{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Daher

$$\Phi_{B_3} : \mathbb{R}^4 \to P_3, \qquad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

(ii) Wir bestimmen Φ_B^{-1}:
Es gilt $\Phi_{B_3}^{-1}(p_{i-1}) = e_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Daher

$$\Phi_{B_3}^{-1} : P_3 \to \mathbb{R}^4, \quad p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Mit Teilaufgabe (a) erhalten wir

$$\Phi_{B_3}^{-1}(p) = \Phi_{B_3}^{-1}(2p_0 - 3p_1 + 0p_2 + 2p_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) (i) In den Spalten der Koordinatenmatrix stehen die Koordinaten bzgl. B_2 der Bilder der Basis B_3 unter f, d.h.

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \Phi_{B_2}^{-1}(f(p_0)) & \Phi_{B_2}^{-1}(f(p_1)) & \Phi_{B_2}^{-1}(f(p_2)) & \Phi_{B_2}^{-1}(f(p_3)) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Bilder der Basis (p_0, p_1, p_2, p_3) unter f und stellen sie mit Hilfe der Basis B_2 dar. Es gilt

$$\begin{array}{rclclcl} (f(p_0))(x) & = & (x+1)\cdot 0 - 3\cdot 1 & = & -3 & = & -3p_0(x), \\ (f(p_1))(x) & = & (x+1) - 3x & = & -2x+1 & = & p_0(x) - 2p_1(x), \\ (f(p_2))(x) & = & (x+1)2x - 3x^2 & = & -x^2+2x & = & 2p_1(x) - p_2(x), \\ (f(p_3))(x) & = & (x+1)3x^2 - 3x^3 & = & 3x^2 & = & 3p_2(x). \end{array}$$

$$\Longrightarrow f(p_0) = -3p_0, \quad f(p_1) = p_0 - 2p_1, \quad f(p_2) = 2p_1 - p_2, \quad f(p_3) = 2p_2$$

$$\Longrightarrow M_{B_2}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt:

$$M_{B_2}^{B_2}(g) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_{B_2}^{-1}(g(p_0)) & \Phi_{B_2}^{-1}(g(p_1)) & \Phi_{B_2}^{-1}(g(p_2)) \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Bilder der Basis (p_0, p_1, p_2) unter g und stellen sie mit Hilfe der Basis B_2 dar:

$$\begin{array}{rclclcl} (g(p_0))(x) & = & 1\cdot(x+1) - 1\cdot x & = & 1 & = & p_0(x) \\ (g(p_1))(x) & = & x(x+1) - (x+1)x & & & = & 0 \\ (g(p_2))(x) & = & x^2(x+1) - (x+1)^2 x & = & -x^2 - x & = & -p_1(x) - p_2(x) \end{array}$$

$$\Longrightarrow g(p_0) = p_0, \quad g(p_1) = 0, \quad g(p_2) = -p_1 - p_2$$

$$\Longrightarrow M_{B_2}^{B_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) (i) Wir berechnen $f(p)$ direkt:

$$\begin{aligned} (f(p))(x) &= (x+1)(6x^2-3) - 3(2x^3 - 3x + 2) = -9 + 6x + 6x^2 \\ &= -9p_0(x) + 6p_1(x) + 6p_2(x) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(p) = -9p_0 + 6p_1 + 6p_2$$

(ii) Wir berechnen $f(p)$ mittels der gegebenen Formel: Es gilt

$$f(p) = (\Phi_{B_2} \circ \widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)} \circ \Phi_{B_3}^{-1})(2p_3 - 3p_1 + 2p_0) = (\Phi_{B_2} \circ \widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)})(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$$

$$= \Phi_{B_2}(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \Phi_{B_2}(\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}) = -9p_0 + 6p_1 + 6p_2.$$

(e) Mit Aufgabe P44(a) gilt:

$$\mathrm{Kern}(f) = \Phi_{B_3}(\mathrm{Kern}(\widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)})) = \Phi_{B_3}(\mathrm{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0)).$$

Es ist also $\mathrm{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0)$ zu bestimmen. Wir bringen zunächst die Matrix $M_{B_2}^{B_3}(f)$ in strenge Zeilenstufenform:

$$M_{B_2}^{B_3}(f) \overset{(-1/3)Z1\to Z1,(-1/2)Z2\to Z2,-Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(1/3)Z2+Z1\to Z1,(-1/2)Z2\to Z2,-Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z3+Z2\to Z2,(-1/2)Z2\to Z2,(1/3)Z3+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} =: Z$$

Die Position der Pivotelemente ist gegeben über $(j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 3)$. Sei F die Matrix, welche durch Streichen der Spalten j_1, j_2, j_3 von Z hervorgeht. Eine Basis von $\mathrm{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0)$ ist dann gegeben durch $w \in \mathbb{R}^4$, wobei

$$\begin{pmatrix} w_{j_1} \\ w_{j_2} \\ w_{j_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = -F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$w_4 = e_1 = (1) \in \mathbb{R}.$$

$$\implies \mathrm{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{Lin}(w).$$

$$\implies \mathrm{Kern}(f) = \Phi_{B_3}(\mathrm{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0)) = \Phi_{B_3}(\mathrm{Lin}(w)) = \mathrm{Lin}(\Phi_{B_3}(w)) = \mathrm{Lin}(p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3).$$

$$\implies \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Kern}(f) = 1$$

(f) Wir nutzen Aufgabe P44 (b) aus: $\mathrm{Bild}(g) = \Phi_{B_2}(\mathrm{Bild}(\widetilde{M_{B_2}^{B_2}(g)}))$.
Es gilt:

$$\mathrm{Bild}(\widetilde{M_{B_2}^{B_2}(g)}) = \widetilde{M_{B_2}^{B_2}(g)}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Spaltenraum}(M_{B_2}^{B_2}(g))$$
$$= \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Daher:

$$\mathrm{Bild}(g) = \Phi_{B_2}(\mathrm{Bild}(\widetilde{M_{B_2}^{B_2}(g)}) = \Phi_{B_2}(\mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix})) = \mathrm{Lin}(\Phi_{B_2}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}), \Phi_{B_2}(\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}))$$

$$= \mathrm{Lin}(p_0, -p_1 - p_2).$$

$$\implies \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(g)) = 2$$

Aufgabe P42 (Darstellungsmatrizen in $\mathbb{R}^2$).
Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{pmatrix} \cdot x.$$

zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $\mathbb{R}^2$. Gegeben seien weiter die beiden Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

sodass $B = (v_1, v_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet.

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $v = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ bzgl. der Basis B, d.h. berechnen Sie $\Phi_B^{-1}(v)$.

(b) Berechnen Sie $M_{(e_1,e_2)}^{(e_1,e_2)}(f)$ und $M_B^B(f)$.

(c) Bestimmen Sie $f(v)$ einmal direkt und einmal mittels $f = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$.

(d) Veranschaulichen Sie die zweite Rechnung aus (d) in einem (normalen) Koordinatensystem und interpretieren Sie die Abbildung f.

Lösung:

(a) Gesucht sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = v \stackrel{!}{=} \Phi_B((\lambda_1, \lambda_2)^t) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

Dies ist äquivalent zum LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}}_{A:=} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}}_{\lambda:=} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{b:=}$$

Zur Lösung des LGS bringen wir $A|b$ auf strenge Zeilenstufenform:

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{array}\right) \overset{Z1+Z2\to Z2,(1/2)Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 1\\0 & 1 & \frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\overset{-Z2+Z1\to Z1,-Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 1 & \frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\implies v = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{3}{2}v_2$$

$$\implies \Phi_B^{-1}(v) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

(b) (i) Es gilt $f = \tilde{A}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vorlesung liefert:

$$M_{(e_1,e_2)}^{(e_1,e_2)}(f) = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} | & | \\ \Phi_B^{-1}(f(v_1)) & \Phi_B^{-1}(f(v_2)) \\ | &] \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen also $f(v_i)$ und stellen diese wieder in der Basis $B = (v_1, v_2)$ dar:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v_1 + 0v_2 \\ f(v_2) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0v_1 + 4v_2. \end{aligned}$$

Der allgemeine Ansatz zum Finden der Darstellung in v_1, v_2 wäre hier jeweils das Lösen eines LGS gewesen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Da hier die Lösungen aber einfach zu sehen waren, ist die Lösung eines LGS nicht notwendig.
Es folgt

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

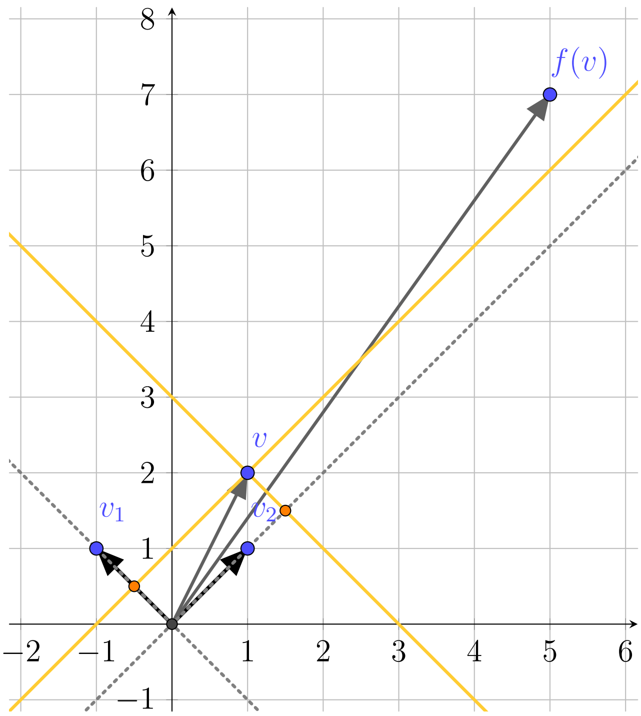
(c) (i) Wir bestimmen $f(v)$ direkt:

$$f(v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(ii) Wir bestimmen $f(v)$ mittels der gegebenen Formel:

$$\begin{aligned} f(v) &= (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1})(v) = (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)})(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}) = \Phi_B(M_B^B(f) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}) = \Phi_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}) \\ &= 1 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) In folgender Graphik sind v_1, v_2 und $v, f(v)$ eingetragen:



Durch f wird also die v_1–Koordinate des Vektors v verdoppelt und die v_2–Koordinate vervierfacht. In diesem Sinne ist f also nur eine Streckung in beide Koordinatenrichtungen im Koordinatensystem $B = (v_1, v_2)$.

Aufgabe P43 (Darstellungsmatrizen für Abbildungen zwischen Matrizenräumen). Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wir definieren die Abbildung

$$f : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \times M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}),\ X \mapsto AX - XA$$

zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Weiter seien

$$M_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad M_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad M_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad M_4 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Dann bildet $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ eine Basis von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Weiter bezeichne $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die Standardbasis von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(a) Geben Sie die Koordinaten von $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ bzgl. B an sowie die Matrix M', welche durch die Koordinaten $(1, 2, 1, 2)^t$ bzgl. B beschrieben wird.

(b) Berechnen Sie $M_B^B(f)$, $M_E^E(f)$ und $M_E^B(f)$.

(c) Berechnen Sie $f(M)$ einmal direkt und einmal unter Verwendung von $M_B^B(f)$.

(d) Es sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie Kern$(f)$ und Bild(f) mit Hilfe von $M_E^E(f)$.

Lösung:

(a) Wir suchen $\lambda_1, ..., \lambda_4 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M \overset{!}{=} \Phi_B(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_4 & \lambda_1 - \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Vergleich der Einträge in der Matrix liefert 4 Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 &=& \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & & \\ 1 &=& & & \lambda_2 & + & & + & \lambda_4 \\ 1 &=& & & \lambda_2 & & & - & \lambda_4 \\ 1 &=& \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & & \end{array}$$

Wir lösen das LGS und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-Z1+Z4\to Z4}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1/2)Z3\to Z3,(-1/2)Z4\to Z4,Z3\leftrightarrow Z4}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-Z3+Z1\to Z1,-Z4+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow \; M = M_1 + M_3 + M_4 = 1 \cdot M_1 + 1 \cdot M_2 + 0 \cdot M_3 + 0 \cdot M_4$

Bemerkung: Hier hätten wir die Koordinaten aufgrund der einfachen Gestalt von M auch direkt angeben können.

$\Longrightarrow$ Die Koordinaten von M sind bzgl. der Basis B gegeben über

$$\Phi_B^{-1}(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ferner gilt

$$\Phi_B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3 + 2 \cdot M_3 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

(b) (i) Es gilt

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(f(M_1)) & \Phi_B^{-1}(f(M_2)) & \Phi_B^{-1}(f(M_3)) & \Phi_B^{-1}(f(M_4)) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

Wir berechnen also $f(M_i)$ und stellen das Ergebnis in der Basis $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ dar:

$$\begin{aligned} f(M_1) &= A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = A - A = 0, \\ f(M_2) &= A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) - A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b & a \\ d & c \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{smallmatrix}\right) = (b-c)M_3 + (a-d)M_4 \\ f(M_3) &= A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) - A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ c & -d \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -c & -d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &= (-b) \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}_{=M_2+M_4} + c \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)}_{=M_2-M_4} = (c-b)M_2 + (-b-c)M_4, \\ f(M_4) &= A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) - A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -b & a \\ -d & c \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ -a & -b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -b-c & a-d \\ -d+a & c+b \end{smallmatrix}\right) \\ &= (-b-c)M_3 + (a-d)M_4. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\Longrightarrow M_B^B(f) = \; = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (c-b) & 0 \\ 0 & (b-c) & 0 & (-b-c) \\ 0 & (a-d) & (-b-c) & (a-d) \end{pmatrix}$$

(ii) Wie zuvor:

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) &= A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) - A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) = (-b)E_{12} + cE_{21}, \\
f(E_{12}) &= A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) - A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) = (-c)E_{11} + (a-d)E_{12} + cE_{22} \\
f(E_{21}) &= A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) - A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ d-a & b \end{smallmatrix}\right) = bE_{11} + (d-a)E_{21} + (-b)E_{22}, \\
f(E_{22}) &= A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - A\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{smallmatrix}\right) = bE_{12} + (-c)E_{21}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Definition von $M_E^E(f)$:

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & (a-d) & 0 & b \\ c & 0 & (d-a) & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Wie zuvor:

$$\begin{aligned}
f(M_1) &= 0, \\
f(M_2) &= \left(\begin{smallmatrix} b & a \\ d & c \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{smallmatrix}\right) = (b-c)E_{11} + (a-d)E_{12} + (d-a)E_{21} + (c-b)E_{22} \\
f(M_3) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{smallmatrix}\right) = -2bE_{12} + 2cE_{21} \\
f(M_4) &= \left(\begin{smallmatrix} -b-c & a-d \\ -d+a & c+b \end{smallmatrix}\right) = (-b-c)E_{11} + (a-d)E_{12} + (-d-a)E_{21} + (c+b)E_{22}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Definition von $M_E^B(f)$:

$$M_E^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & (b-c) & 0 & (-b-c) \\ 0 & (a-d) & -2b & (a-d) \\ 0 & (d-a) & 2c & (-d-a) \\ 0 & (c-b) & 0 & (c+b) \end{pmatrix}$$

(c) (i) Wir berechnen $f(M)$ direkt:

$$f(M) = A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)A = \left(\begin{smallmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{smallmatrix}\right)$$

(ii) Wir berechnen $f(M)$ mittels $f = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$:

$$\begin{aligned}
f(M) &= (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1})(M) \overset{\text{(a)}}{=} (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)})\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \Phi_B\left(M_B^B(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \Phi_B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b-c \\ a-d \end{pmatrix}\right) = (b-c)M_3 + (a-d)M_4 = \left(\begin{smallmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

(d) Wir berechnen den Kern und das Bild von f anhand der Koordinatenmatrix $M_E^E(f)$.

(i) Aufgabe P44 (a) liefert:

$$\mathrm{Kern}(f) = \Phi_E(\mathrm{Kern}(\widetilde{M_E^E(f)})) = \Phi_E(\mathrm{Lös}(M_E^E(f), 0)).$$

Es ist also $\text{Lös}(M_E^E(f), 0)$ zu bestimmen. Wir bringen die Matrix $M_E^E(f)$ in strenge Zeilenstufenform:

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z1 \leftrightarrow Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overset{Z1+Z2 \to Z2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overset{Z2+Z3 \to Z23, -Z2+Z4 \to Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: Z$$

Die Position der Pivotelemente ist gegeben über $(j_1, j_2) = (1, 2)$. Sei F die Matrix, welche durch Streichen der Spalte j_1, j_2 und aller Nullzeilen von Z hervorgeht, d.h.

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis von $\text{Lös}(M_E^E(f), 0)$ ist dann gegeben durch (w_1, w_2), wobei

- $(w_{1j_1}, w_{1j_2}) = (w_{11}, w_{12}) = 1.$ Spalte von $-F$ und $(w_{13}, w_{14}) = e_1 \in \mathbb{R}^2$,
- $(w_{2j_1}, w_{2j_2}) = (w_{21}, w_{22}) = 1.$ Spalte von $-F$ und $(w_{23}, w_{24}) = e_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$\implies \text{Lös}(M_E^E(f), 0) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Lin}(w_1, w_2)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{Kern}(f) &= \Phi_E(\text{Lös}(M_E^E(f), 0)) = \Phi_E(\text{Lin}(w_1, w_2)) \\ &= \text{Lin}(\Phi_E(w_1), \Phi_E(w_2)) = \text{Lin}(E_{11} + E_{12} + E_{21}, E_{11} + E_{22}) \\ &= \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\implies \dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(f) = 2$$

(ii) Bestimme $\text{Bild}(f)$:

Wir nutzen Aufgabe P44 (b) aus: $\text{Bild}(f) = \Phi_B(\text{Bild}(\widetilde{M_B^B(f)}))$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\widetilde{M_E^E(f)}) &= \widetilde{M_E^E(f)}(\mathbb{R}^4) = \text{Spaltenraum}(M_E^E(f)) \\ &= \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Bild}(f) &= \Phi_E(\text{Bild}(\widetilde{M_E^E(f)}) = \Phi_E\left(\text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \text{Lin}\left(\Phi_E\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \Phi_E\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \text{Lin}(E_{21} - E_{12}, E_{12} + E_{22} - E_{11}) \\ &= \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

$$\implies \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(f)) = 2$$

Aufgabe P44 (Darstellungsmatrizen als Hilfsmittel zur Bestimmung von Kern und Bild linearer Abbildungen).

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Sei B eine Basis von V und C eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Kern}(f) = \Phi_B(\mathrm{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)}))$,

(b) $\mathrm{Bild}(f) = \Phi_C(\mathrm{Bild}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.

(c) $\dim_K \mathrm{Kern}(f) = \dim_K \mathrm{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.

(d) $\dim_K \mathrm{Bild}(f) = \dim_K \mathrm{Bild}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.

Lösung:

Laut Vorlesung gilt die Gleichheit $f = \Phi_C \circ \widetilde{M_C^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$.

(a) Es gilt:
$v \in \mathrm{Kern}(f)$
$\iff f(v) = 0$
$\iff \Phi_C(\widetilde{M_C^B(f)}(\Phi_B^{-1}(v))) = 0$
$\overset{\Phi_C^{-1}(0)=0}{\iff} \widetilde{M_C^B(f)}(\Phi_B^{-1}(v)) = 0$
$\iff \Phi_B^{-1}(v) \in \mathrm{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)})$
$\overset{(*)}{\iff} v \in \Phi_B(\mathrm{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.

(*) gilt nur, da Φ_B bijektiv ist. Wir zeigen (mit einfacherer Notation, $g : X \to Y$ bijektiv, $A \subset X$): $g^{-1}(y) \in A \iff y \in g(A)$)
„$\Rightarrow$“: $g^{-1}(y) \in A \Rightarrow$ Es gibt $x \in A$ mit $g^{-1}(y) = x \Rightarrow y = g(g^{-1}(y)) = g(x) \in g(A)$.
„$\Leftarrow$“: $y \in g(A) \Rightarrow$ Es gibt $x \in A$ mit $y = g(x) \Rightarrow g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) \overset{g \text{ bij.}}{=} x \in A$.

(b) Es gilt:
$w \in \mathrm{Bild}(f)$
$\iff w \in f(V)$
$\iff w \in \Phi_C(\widetilde{M_C^B(f)}(\Phi_B^{-1}(V)))$
$\overset{\Phi_B : K^n \to V \text{ bijektiv}}{\iff} w \in \Phi_C(\widetilde{M_C^B(f)}(K^n))$
$\iff w \in \Phi_C(\mathrm{Bild}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.

(c) Man braucht nur eine Begründung, warum der Isomorphimus Φ_B bei der Dimensionsberechnung weggelassen werden kann.
Schreibe kurz $A := \mathrm{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)})$. Betrachte die Einschränkung $\Phi_B|_A : A \to \Phi_B(A)$.
Φ_B Isomorphismus $\Rightarrow \Phi_B|_A$ ist linear und injektiv. $\Rightarrow$

$$\dim_K \Phi_B(A) = \dim_K \mathrm{Bild}(\Phi_B|_A) \overset{\text{Dim.-Formel lin. Abb.}}{=} \dim_K(A) - \dim_K \underbrace{\mathrm{Kern}(\Phi_B|_A)}_{\Phi_B|_A \overset{\text{injektiv}}{=} \{0\}} = \dim_K(A).$$

Mit (a) folgt:

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(f)) \overset{(a)}{=} \dim_K(\Phi_B(A)) = \dim_K(A).$$

(d) Analog zu (c).

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`