UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

11. Abgabeblatt

Aufgabe 41	Aufgabe 42	Aufgabe 43	Aufgabe 44	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 41 (Darstellungsmatrizen für Abbildungen zwischen Polynomräumen, 4 = 1 + 0.5 + 1 + 1 + 0.5 Punkte).

Für $D \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Vektorraum der Polynome

$$P_D = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists a_0, ..., a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{D} a_k x^k\}$$

über $\mathbb{R}$. Seien $p_i, q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, ..., D)$ definiert durch

$$p_i(x) = x^i, \qquad q_i(x) = (x+1)^i.$$

Dann sind $B_D = (p_0, ..., p_D)$ und $B'_D = (q_0, ..., q_D)$ Basen von P_D.

(a) Geben Sie die Abbildungen $\Phi_{B'_2}$ und $\Phi^{-1}_{B'_2}$ an.
Hinweis: Bei $\Phi^{-1}_{B'_2}$ *soll also* $\Phi^{-1}_{B'_2}(p)$ *für alle* $p \in P_2$ *mit* $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *angegeben werden.*

(b) Sei $w \in P_2$ gegeben durch $w(x) = 1 + x + x^2$. Geben Sie die Koordinaten von w bzgl. B'_2 an.

Im Folgenden betrachten wir die linearen Abbildungen

$$f : P_2 \to \mathbb{R}^2, p \mapsto \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{pmatrix}, \qquad g : P_2 \to P_2, p \mapsto [x \mapsto p(x+1)]$$

(c) Berechnen Sie $M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f)$ und $M^{B_2}_{B'_2}(g)$.

(d) Ermitteln Sie Kern(f) und $\dim_{\mathbb{R}}$Kern(f) unter Verwendung von $M^{B_2}_{(e_1,e_2)}(f)$ und Aufgabe P44.

(e) Zeigen Sie mittels Aufgabe P44, dass g bijektiv ist.

Aufgabe 42 (Darstellungsmatrizen in $\mathbb{R}^3$, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Wir fassen $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$$

und die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t$. Dann bildet $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Sei $w = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Berechnen Sie die Koordinaten von w bzgl. B, d.h. geben Sie $\Phi_B^{-1}(w)$ an.

(b) Bestimmen Sie $M_{(e_1,e_2,e_3)}^{(e_1,e_2,e_3)}(f)$, $M_B^B(f)$ und $M_B^{(e_1,e_2,e_3)}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
Hinweis: Es gilt $e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$ *und* $e_2 = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$.

(c) Berechnen Sie $f(w)$ einmal direkt und einmal mittels $f = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$.

Aufgabe 43 (Darstellungsmatrizen im Matrizenraum, 4 = 0.5 + 1 + 1 + 1.5 Punkte).
Wir definieren die lineare Abbildung

$$f : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}),\ X \mapsto \frac{1}{2}(X - X^t)$$

zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Weiter seien

$$M_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad M_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad M_3 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad M_4 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Dann bildet $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ eine Basis von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(a) Geben Sie die Koordinaten von $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ bzgl. B an.

(b) Berechnen Sie $M_B^B(f)$.

(c) Berechnen Sie $f(M)$ einmal direkt und einmal unter Verwendung von $M_B^B(f)$.

(d) Berechnen Sie Kern(f) und Bild(f) mit Hilfe von $M_B^B(f)$ und P44.

Aufgabe 44 (Rechnen mit Darstellungsmatrizen, 4 = 0.5 + 1.5 + 1 + 1 Punkte).
Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$, $g : U \to V$ lineare Abbildungen. Seien $A = (u_1, ..., u_r)$, $B = (v_1, ..., v_s)$, $C = (w_1, ..., w_t)$ Basen von U, V, W. Zeigen Sie:

(a) $M_B^B(\mathrm{id}_V) = E_s$.

(b) $M_C^A(f \circ g) = M_C^B(f) \cdot M_B^A(g)$.

(c) Falls f ein Isomorphismus ist (und daher $s = t$), gilt $M_B^C(f^{-1}) = (M_C^B(f))^{-1}$.

Es sei nun $V = W$ und $B = (v_1, v_2)$. f sei gegeben mittels $M_B^B(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Schreiben Sie $f(v_1 + v_2)$ als Linearkombinationen von v_1, v_2.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **17. Januar 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`