UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

10. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 37	Aufgabe 38	Aufgabe 39	Aufgabe 40	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 37 (Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus, 4 Punkte).

Für ein $a \in \mathbb{Q}$ sei gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}), \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{Q}).$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum $\text{Lös}(A, b)$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Q}$.

Lösung:

Wir lösen das LGS $Ax = b$ für $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{Q}^3$. Zur Lösung des LGS bringen wir $A|b$ in strenge Zeilenstufenform:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & a & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & a & 6 & 4 \end{array}\right) \overset{Z1 \leftrightarrow Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ a & 4 & a & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-a)Z1+2Z3 \to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 8-a^2 & -4a & 2-4a \end{array}\right)$$

$$\overset{(a)Z2+Z3 \to Z3, Z3 \leftrightarrow Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & (a+4)(-a+2) & 0 & 2-a \end{array}\right) =: A'|b'$$

Wir führen Fallunterscheidungen durch:

(i) Fall $a = -4$:

$$A'|b' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$\implies \text{Rang}(A') = 2 \neq 3 = \text{Rang}(A'|b')$
$\implies$ LGS besitzt keine Lösung nach Satz 10.5.

(ii) Fall $a = 2$:

$$A'|b' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{(-1/2)Z2 \to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-2)Z2+Z1 \to Z1, (1/2)Z1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =: A^*|b^*$$

Algorithmus zur Lösung inhomogener LGS: Hier ist $r = 2$, die Position der Pivot-Elemente $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$. Eine spezielle Lösung ist daher gegeben durch $v_{j_i} = b_i^*$ $(i = 1, 2)$, wobei der Rest von v aus Nullen besteht. Eine spezielle Lösung ist also:

$$v = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei B die Matrix, welche aus A^* durch Streichen der Spalten j_1, j_2 und aller Nullzeilen hervorgeht:

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis von $\text{Lös}(A, 0)$ ist dann gegeben durch $w = (w_1, w_2, w_3)^t \in \mathbb{R}^3$, wobei

$$(w_{j_1}, w_{j_2}) = (w_1, w_2) = 1.\ \text{Spalte von } -B \text{ und} \quad (w_3) = e_1 = (1) \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$w = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen von $Ax = b$ sind daher gegeben durch den 1-dimensionalen affinen Unterraum

$$\text{Lös}(A|b) = \text{Lös}(A'|b') = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) Fall $a \neq -4$ und $a \neq 2$:
$\implies$ $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A') = 3 = \text{Rang}(A'|b') = \text{Rang}(A|b)$
$\implies$ Nach Korollar 10.6 besitzt das LGS eine eindeutige Lösung. Wir bringen $A'|b'$ weiter auf strenge Zeilenstufenform:

$$A'|b' \overset{(1/(2-a))Z3 \to Z3, 2Z3+(a+4)Z2 \to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & (a+4) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4(a+4) & 3a+14 \end{array}\right)$$

$$\overset{(1/(a+4)Z2 \to Z2, 1/(4(a+4)))Z3 \to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a+14}{4(a+4)} \end{array}\right)$$

$$\overset{(-a)Z2+Z1 \to Z1, (-6)Z3+Z1 \to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-3a-10}{4(a+4)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a+14}{4(a+4)} \end{array}\right)$$

Wir können die Lösung direkt ablesen und erhalten

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-3a-10}{4(a+4)} \\ \frac{1}{a+4} \\ \frac{3a+14}{4(a+4)} \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 38 (Bestimmung inverser Matrizen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Entscheiden Sie bei folgenden Matrizen jeweils, ob diese über den angegebenen Körpern invertierbar sind und bestimmen Sie im Falle der Existenz die Inverse. Nutzen Sie dafür das Resultat aus A28(b)(ii) bzw. den Algorithmus aus Aufgabe P38:

(a) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{Q}$,

(b) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, F_5)$,

(c) $A_3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

Lösung:

Wir wenden jeweils parallel dieselben elementare Zeilenumformungen auf die gegebene Matrix und die entsprechende Einheitsmatrix E_3 an, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix E_3 steht:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
A_1|E_3 \quad &:= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z1+Z2\to Z2,(-2)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z3\to Z3,Z2\leftrightarrow Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) =: A_1'|S'
\end{aligned}$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

- Fall $x = 1$: Zeilenrang(A_1) = Zeilenrang$(A_1') = 2 < 3$.
  Aufgabe A28(b)(ii) $\Rightarrow$ A_1 nicht invertierbar.
- Fall $x \neq 1$: Forme weiter um:

$$\begin{aligned}
A_1'|S' \quad &:= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{1}{x-1}Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 0 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)Z3+Z2\to Z2,(-1)Z3+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1+\frac{1}{x-1} & -\frac{1}{x-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2+\frac{2}{x-1} & -\frac{2}{x-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 0 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1-\frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2+\frac{2}{x-1} & -\frac{2}{x-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Damit lautet die Inverse:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1-\frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 1 \\ 2+\frac{2}{x-1} & -\frac{2}{x-1} & -1 \\ -\frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x-1}\begin{pmatrix} -x & 1 & x-1 \\ 2x & -2 & -(x-1) \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
A_2|E_3 \quad &:= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)Z1+Z2\to Z2,(-2)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{3Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{2Z3\to Z3,(-3)Z3+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right),
\end{aligned}$$

d.h.

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
A_3|E_3 \quad &:= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\sqrt{2}Z1\to Z1, \sqrt{3}Z2\to Z2, \sqrt{6}Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z1+Z2\to Z2, (-1)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{6} \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{1}{2}Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{6} \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{6} \end{array}\right) \\
&\overset{-\frac{1}{3}Z3\to Z3, -\frac{1}{2}Z3+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right) \\
&\overset{Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
A_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = A_3^T
$$

(Matrizen A_3 mit dieser Eigenschaft heißen orthogonal).

Aufgabe 39 (Charakterisierung affiner Unterräume, 4 = 3 + 1 Punkte).
Sei K ein Körper, V ein K–Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge.

(a) Es gelte $2 := 1 + 1 \neq 0$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

  (i) X ist ein affiner Unterraum von V.

  (ii) $X \neq \emptyset$ und für alle $x, y \in X$, $\lambda \in K$ gilt $x + \lambda(y - x) \in X$.

(b) Zeigen Sie, dass die Bedingung $2 \neq 0$ aus (a) notwendig ist, indem Sie ein Beispiel für den F_2-Vektorraum $V = F_2^2$ finden, in welchem (ii) erfüllt ist, aber (i) nicht.

Lösung:

(a) „$(i) \Rightarrow (ii)$“: Sei X affiner Unterraum von V.
$\Rightarrow \exists v \in V$, UVR $U \subset V$ von V mit $X = v + U$. Dann:

- $\Rightarrow v = v + 0 \in v + U = X \Rightarrow X \neq \emptyset$.

- Seien nun $x, y \in X$ beliebig, $\lambda \in K$.
  $\overset{X=v+U}{\Rightarrow} \; x = v + u_1, \; y = v + u_2$ mit $u_1, u_2 \in U$
  $\Rightarrow$
  $$x + \lambda(y - x) = (v + u_1) + \lambda((v + u_2) - (v + u_1)) = v + \underbrace{u_1 + \lambda(u_2 - u_1)}_{\overset{U \text{ UVR}}{\in} U} \in X.$$

„$(i) \Leftarrow (ii)$“: $X \neq \emptyset \Rightarrow$ Wähle $v \in X$.
Wir definieren $U := \{x - v : x \in X\}$ und zeigen nun, dass U ein UVR von V ist (dann ist offensichtlich $X = v + U$ ein affiner Unterraum).

- Es ist $0 = v - v \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$.
- Seien $u_1, u_2 \in U$.
  $\Rightarrow u_1 = x_1 - v, \; u_2 = x_2 - v$ mit $x_1, x_2 \in X$.
  $\overset{\text{Vorauss., } 2 \neq 0}{\Rightarrow} \; \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \in X$.
  $\overset{Vorauss.}{\Rightarrow} \; x_1 + x_2 - v = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + (-1) \cdot (v - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)) \in X$
  $\Rightarrow u_1 + u_2 + v = (x_1 - v) + (x_2 - v) + v = x_1 + x_2 - v \in X$.
  $\Rightarrow u_1 + u_2 \in U$.

  Anmerkung zur Findung der richtigen Koeffizienten: Für $\lambda, \alpha, \mu \in K$ gilt $x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \in X$ und $v + \mu(x_1 - v) \in X$ und damit auch
  $$[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)] + \alpha([v + \mu(x_1 - v)] - [x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]) \in X$$
  Man möchte erreichen, dass obiger Ausdruck $x_1 + x_2 - v$ entspricht. Vergleichen der Vorfaktoren der beiden Ausdrücke liefert 3 Gleichungen:
  $$[(1 - \lambda)(1 - \alpha) + \alpha\mu]x_1 + [\alpha(1 - \lambda)]x_2 + [\alpha(1 - \mu)]v \overset{!}{=} x_1 + x_2 - v,$$
  d.h. $(1 - \lambda)(1 - \alpha) + \alpha\mu = 1$, $\alpha(1 - \lambda) = 1$, $\alpha(1 - \mu) = -1$.
  Dies liefert die Lösungen $\alpha = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\mu = 0$, die in obigem Beweis verwendet wurden. Man muss mindestens 3 Variablen einführen (und damit 3-mal die gegebene Bedingung nutzen), um ohne intelligentes Vorwissen ein lösbares Gleichungssystem (3 Gleichungen für 3 Unbekannte) zu erhalten.
- Sei $u \in U$, $\lambda \in K$
  $\Rightarrow u = x - v$ mit $x \in X$.
  $\overset{\text{Voraussetzung, } x,v \in X}{\Rightarrow} \; \lambda u + v = v + \lambda(x - v) \in X$.

(b) Wähle $X = \{(0,1), (1,0), (1,1)\} \subset F_2^2$. Dann ist (ii) erfüllt, denn:

- $X \neq \emptyset$,
- Seien $x, y \in X$ und $\lambda \in F_2$.
  Fall 1: $\lambda = 0$. Dann ist $x + \lambda(y - x) = x \in X$.
  Fall 2: $\lambda = 1$. Dann gilt $x + \lambda(y - x) = y \in X$.

Aber X ist kein affiner Unterraum, denn:
Angenommen, X ist affiner Unterraum.
$(0,1) \in X \Rightarrow$ Es gibt UVR $U \subset F_2^2$ mit $X = (0,1) + U = \{(0,1) + u : u \in U\}$.
$\Rightarrow$ Es gibt $u_1, u_2 \in U$ mit $(1,1) = (0,1) + u_1$, $(1,0) = (0,1) + u_2$
$\Rightarrow (1,0) = u_1, (1,1) = u_2 \in U$.
U UVR $\Rightarrow (0,1) = u_1 + u_2 \in U$

$\Rightarrow (0,0) = (0,1) + (0,1) \in (0,1) + U = X$, Widerspruch!

Grund: Argument für „(ii) $\Rightarrow$ (i)“ in (a) funktioniert nicht mehr.

Aufgabe 40 (Lineare Gleichungssyteme und magische Quadrate, 4 = 1 + 2 + 0.5 + 0.5 Bonuspunkte).

Ein „Magisches 3×3-Quadrat“ zur Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist eine Tafel aus 9 Feldern gefüllt mit reellen Zahlen, in welchem die Summe der Spalten, der Zeilen und der Diagonalen die gleiche Zahl λ ergibt:

a	d	g
b	e	h
c	f	i

In der folgenden Betrachtung schreiben wir ein magisches Quadrat als einen Vektor $x = (a,b,c,d,e,f,g,h,i)^t \in \mathbb{R}^9$.

(a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{8\times 9}$, sodass die Menge aller magischen Quadrate durch die Menge

$$U = \text{Lös}(A,z) = \{x = (a,b,c,d,e,f,g,h,i)^t \in \mathbb{R}^9 : A \cdot x = z\},$$

beschrieben wird, wobei $z := \lambda \cdot (1,...,1)^t \in \mathbb{R}^8$.

(b) Zeigen Sie mittels des Gauß-Algorithmus, dass $\dim_{\mathbb{R}} \text{Lös}(A,z) = 2$ und geben Sie alle magischen Quadrate in der Form

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline\end{array} + \mu_1 \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline\end{array} + \mu_2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline\end{array}$$

mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass

4	9	2
3	5	7
8	1	6

in $\text{Lös}(A,z)$ enthalten ist, indem Sie die passenden $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ aus (b) angeben. Es handelt sich um ein magisches Quadrat zur Zahl 15 gefüllt nur mit den Zahlen von 1-9, welche jeweils auch nur einmal vorkommen dürfen.

(d) Nutzen Sie die in (b) ermittelte Darstellung, um zu zeigen: Soll jede Zahl von 1-9 genau einmal in einem magischen Quadrat zur Zahl λ auftauchen, so muss $\lambda = 15$ gelten und in der Mitte eine 5 stehen.

Lösung:

(a) Die einzelnen Bedingungen für ein magisches Quadrat lauten:

$$\begin{aligned} &a+b+c=\lambda, \quad d+e+f=\lambda, \quad g+h+i=\lambda, \\ &a+d+g=\lambda, \quad b+e+h=\lambda, \quad c+f+i=\lambda, \\ &a+e+i=\lambda, \quad c+e+g=\lambda. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $A \cdot x = z$ mit

$$A = \begin{pmatrix}
1 & & & 1 & & & 1 & & \\
& 1 & & & 1 & & & 1 & \\
& & 1 & & & 1 & & & 1 \\
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
& & & 1 & 1 & 1 & & & \\
& & & & & & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 \\
& & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{pmatrix}$$

(der Übersichtlichkeit halber lassen wir die Nullen weg; ein leerer Eintrag in der Matrix bedeutet 0).

(b) Zur Lösung des LGS formen wir $A|z$ in SZFS um:

$$\begin{aligned}
A|z \quad &= \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & 1 & & & 1 & & & \lambda \\
& 1 & & & 1 & & & 1 & & \lambda \\
& & 1 & & & 1 & & & 1 & \lambda \\
1 & 1 & 1 & & & & & & & \lambda \\
& & & 1 & 1 & 1 & & & & \lambda \\
& & & & & & 1 & 1 & 1 & \lambda \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & \lambda \\
& & 1 & & 1 & & 1 & & & \lambda
\end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\substack{(-1)Z1+Z7\to Z7 \\ (-1)Z3+Z8\to Z8}]{\substack{(-1)Z1+Z4\to Z4 \\ (-1)Z2+Z4\to Z4 \\ (-1)Z3+Z4\to Z4}} \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & 1 & & & 1 & & & \lambda \\
& 1 & & & 1 & & & 1 & & \lambda \\
& & 1 & & & 1 & & & 1 & \lambda \\
& & & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2\lambda \\
& & & 1 & 1 & 1 & & & & \lambda \\
& & & & & & 1 & 1 & 1 & \lambda \\
& & & -1 & 1 & & -1 & & 1 & 0 \\
& & & & 1 & -1 & 1 & & -1 & 0
\end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\substack{Z5+Z4\to Z4 \\ Z6+Z4\to Z4}} \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & 1 & & & 1 & & & \lambda \\
& 1 & & & 1 & & & 1 & & \lambda \\
& & 1 & & & 1 & & & 1 & \lambda \\
& & & & & & & & & 0 \\
& & & 1 & 1 & 1 & & & & \lambda \\
& & & & & & 1 & 1 & 1 & \lambda \\
& & & -1 & 1 & & -1 & & 1 & 0 \\
& & & & 1 & -1 & 1 & & -1 & 0
\end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\substack{\text{Entferne Z4} \\ \text{Vertausche Zeilen}}} \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & 1 & & & 1 & & & \lambda \\
& 1 & & & 1 & & & 1 & & \lambda \\
& & 1 & & & 1 & & & 1 & \lambda \\
& & & 1 & 1 & 1 & & & & \lambda \\
& & & -1 & 1 & & -1 & & 1 & 0 \\
& & & & 1 & -1 & 1 & & -1 & 0 \\
& & & & & & 1 & 1 & 1 & \lambda
\end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\substack{Z4+Z5\to Z5\\ (-1)Z4+Z1\to Z1\\ Z5\leftrightarrow Z6}} \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & & -1 & -1 & 1 & & & 0\\
 & 1 & & & 1 & & & 1 & & \lambda\\
 & & 1 & & & 1 & & & 1 & \lambda\\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & & \lambda\\
 & & & & 1 & -1 & 1 & & -1 & 0\\
 & & & & 2 & 1 & -1 & & 1 & \lambda\\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & \lambda
\end{array}\right)$$

Weiter:

$$\xrightarrow{\substack{(-2)Z5+Z6\to Z6\\ Z5+Z1\to Z1\\ (-1)Z5+Z2\to Z2\\ (-1)Z5+Z3\to Z3}} \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & & & -2 & 2 & & -1 & 0\\
 & 1 & & & & 1 & -1 & 1 & 1 & \lambda\\
 & & 1 & & & 1 & & & 1 & \lambda\\
 & & & 1 & & 2 & -1 & & 1 & \lambda\\
 & & & & 1 & -1 & 1 & & -1 & 0\\
 & & & & & 3 & -3 & & 3 & \lambda\\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & \lambda
\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}Z6\to Z6\\ Z6+Z5\to Z5\\ (-2)Z6+Z4\to Z4\\ (-1)Z6+Z3\to Z3\\ (-1)Z6+Z2\to Z2\\ 2Z6+Z1\to Z1}} \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & & & & & & 1 & \frac{2}{3}\lambda\\
 & 1 & & & & & & 1 & & \frac{2}{3}\lambda\\
 & & 1 & & & & 1 & & & \frac{2}{3}\lambda\\
 & & & 1 & & & 1 & & -1 & \frac{1}{3}\lambda\\
 & & & & 1 & & & & & \frac{1}{3}\lambda\\
 & & & & & 1 & -1 & & 1 & \frac{1}{3}\lambda\\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & \lambda
\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{Z7+Z6\to Z6\\ (-1)Z7+Z4\to Z4\\ (-1)Z7+Z3\to Z3}} \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & & & & & & 1 & \frac{2}{3}\lambda\\
 & 1 & & & & & & 1 & & \frac{2}{3}\lambda\\
 & & 1 & & & & & -1 & -1 & -\frac{1}{3}\lambda\\
 & & & 1 & & & & -1 & -2 & -\frac{2}{3}\lambda\\
 & & & & 1 & & & & & \frac{1}{3}\lambda\\
 & & & & & 1 & & 1 & 2 & \frac{4}{3}\lambda\\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & \lambda
\end{array}\right) =: A'|z'$$

Algorithmus zur Lösung inhomogener LGS: Hier ist $r = 7$, die Position der Pivot-Elemente $\{j_1, ..., j_r\} = \{1, ..., 7\}$. Eine spezielle Lösung ist daher gegeben durch $v_{j_i} = z'_i$ $(i = 1, ..., 7)$, Rest von v besteht aus Nullen.

$$v = \frac{\lambda}{3}\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ -1\\ -2\\ 1\\ 4\\ 3\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei B die Matrix, welche aus A' durch Streichen der Spalten $j_1, ..., j_r$ hervorgeht:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Basis von $\text{Lös}(A, 0)$ ist dann gegeben durch (w_1, w_2), wobei

- $(w_{1j_1}, ..., w_{1j_r}) = (w_{11}, ..., w_{17}) =$ 1. Spalte von $-B$ und $(w_{18}, w_{19}) = e_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, und
- $(w_{2j_1}, ..., w_{2j_r}) = (w_{21}, ..., w_{27}) =$ 2. Spalte von $-B$ und $(w_{28}, w_{29}) = e_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$,

d.h.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen von $Ax = z$ sind daher gegeben durch den 2-dimensionalen affinen Unterraum

$$\text{Lös}(A, z) = v + \text{Lös}(A, 0) = \{v + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 | \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Anschaulich:

$$\frac{\lambda}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\frac{\lambda}{3} - \mu_2 & -2\frac{\lambda}{3} + \mu_1 + 2\frac{\lambda}{3}\mu_2 & 3\frac{\lambda}{3} - \mu_1 - \mu_2 \\ 2\frac{\lambda}{3} - \mu_1 & \frac{\lambda}{3} & \mu_1 \\ -\frac{\lambda}{3} + \mu_1 + \mu_2 & 4\frac{\lambda}{3} - \mu_1 - 2\mu_2 & \mu_2 \end{pmatrix} =: M(\mu_1, \mu_2).$$

(c) $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ müssen erfüllen:

$$M(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Wir erhalten durch Vergleich der Komponenten $\mu_1 = M(\mu_1, \mu_2)_{23} = 7$ und $\mu_2 = M(\mu_1, \mu_2)_{33} = 6$.
Durch Einsetzen sieht man leicht, dass tatsächlich im Falle $\mu_1 = 7$, $\mu_2 = 6$ die Gleichung $(*)$ gilt.

(d) Sei M ein beliebiges magisches Quadrat zur Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow M = M(\mu_1, \mu_2)$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.
Zahlen von 1-9 jeweils genau einmal $\Rightarrow$

$$45 = 1 + 2 + ... + 9 = \sum_{j,k=1}^{3} M(\mu_1, \mu_2)_{jk} = 3\lambda.$$

$\Rightarrow \lambda = 15$.
Analyse der mittleren Zahl: Unabhängig von $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $M(\mu_1, \mu_2)_{22} = \frac{\lambda}{3} = 5$.

Aufgabe (Wiederholungs-Weihnachtsaufgabe, 12 Bonuspunkte).

Jede Teilaufgabe (a) - (l) gibt 1 Punkt, falls alle Kästchen richtig markiert sind oder 0.5 Punkte, falls nur ein Kästchen falsch markiert ist. *Kreuzen Sie jeweils nur die richtigen Aussagen an.* Zählen Sie dann die Anzahl der richtigen Antworten in der Teilaufgabe und wählen Sie den entsprechenden Buchstaben aus der Aufstellung (**0-A, 1-B, 2-C, 3-D, 4-E**) aus. Zusammen ergeben die Buchstaben ein Lösungswort.

(a) (**0-D, 1-D, 2-B, 3-L, 4-V**) Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen.

☐ g nicht surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ nicht surjektiv.

☐ f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

☐ $g \circ f$ bijektiv $\Rightarrow f, g$ bijektiv

☐ f surjektiv, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

(b) (**0-I, 1-O, 2-A, 3-E, 4-E**) Sei $F : \mathbb{R}^\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}, (f, g) \mapsto f \circ g$ und $B = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f \text{ bijektiv}\}$.

☐ F ist surjektiv

☐ F ist injektiv

☐ $F(B \times B) = B$

☐ Das Bild der Menge $\{(g, g^{-1}) : g \in B\}$ unter F hat unendlich viele Elemente

(c) (**0-E, 1-S, 2-T, 3-K, 4-M**) Für jede abelsche Gruppe $(G, +)$ mit neutralem Element e_G gilt:

☐ $\forall x \in G : \exists y \in G : x + y = e_G$

☐ $\exists x \in G : \forall y \in G : x + y = e_G$

☐ $\forall x \in G : x + x = e_G$

☐ $\exists x \in G : x + x \neq e_G$

(d) (**0-S, 1-T, 2-I, 3-E, 4-E**) Für die symmetrische Gruppe S_4 und die Elemente $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}$ gilt:

☐ S_4 ist abelsch

☐ $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$

☐ $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

☐ Es gibt $\sigma_2 \in S_4$ mit $\sigma_2 \circ \sigma = ()$.

(e) (**0-N, 1-U, 2-R, 3-S, 4-O**) Es gilt:

☐ F_{51} ist ein Körper

☐ F_6 ist ein kommutativer Ring mit 1

☐ In F_7 gilt $5 \cdot_7 5 = 4$

☐ Es gibt Nullteiler in F_{18}

(f) (**0-S, 1-W, 2-M, 3-R, 4-N**) Sei K ein Körper und $v_1, v_2 \in K^2$. Dann ist (v_1, v_2) genau dann eine Basis von K^2, wenn:

☐ $v_1 \neq v_2$

☐ $v_1 \neq 0$ und $\lambda v_1 \neq v_2$ für alle $\lambda \in K$

☐ $\lambda_1 v_1 \neq \lambda_2 v_2$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$

☐ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \neq 0$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K \backslash \{0\}$

(g) (**0-G, 1-I, 2-R, 3-E, 4-I**) Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, ..., v_n \in V$ Vektoren, so dass $\mathrm{Lin}((v_1, ..., v_n)) = V$. Dann ist

☐ $(v_1, ..., v_n)$ ein Erzeug.-System von V

☐ V ein endlich-dimensionaler K-VR

☐ $\dim_K(V) = n$

☐ $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig, falls $n = \dim_K(V)$.

(h) (**0-O, 1-A, 2-C, 3-N, 4-S**) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_\mathbb{R}(V) = 5$ und $U_1, U_2 \subset V$ zwei UVR mit $\dim_\mathbb{R}(U_1) = \dim_\mathbb{R}(U_2) = 3$. Was ist möglich?

- ☐ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2)=6$
- ☐ $U_1 \oplus U_2 = V$
- ☐ $U_1 \cup U_2$ ist ein UVR von V.
- ☐ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)=1$.

(i) (**0-R, 1-N, 2-A, 3-H, 4-E**) Seien U_1, U_2 UVR von V. Dann gilt stets

- ☐ $\dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim(U_2)$
- ☐ $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(V) \Rightarrow U_1 \subset U_2$
- ☐ $\dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1) \Rightarrow U_2 \subset U_1$
- ☐ $\dim(U_1)+\dim(U_2) > \dim(V) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

(j) (**0-A, 1-U, 2-S, 3-N, 4-A**) Es gilt:

- ☐ Zeilenrang$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4\\5&6&7&8\end{smallmatrix}\right)\right)=2$
- ☐ Zeilenrang$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1&2\\2&4\end{smallmatrix}\right)\right)=2$
- ☐ Zeilenrang$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\right)=2$,
- ☐ Zeilenrang$\left(\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)\right)=2$

(k) (**0-U, 1-L, 2-M, 3-T, 4-E**) Sei K ein Körper und $f: K^{45} \to K^{23}$ sei eine K-lineare Abbildung. Dann gilt:

- ☐ f surjektiv $\Rightarrow \dim_K(\mathrm{Kern}(f))=22$
- ☐ f injektiv $\Rightarrow f$ ist Isomorphismus
- ☐ $\dim_K(\mathrm{Kern}(f))=30$ ist möglich
- ☐ Es gibt UVR $U \subset K^{45}$ mit $U \cong K^{23}$.

(l) (**0-E, 1-E, 2-L, 3-E, 4-M**) Wir betrachten das Lineare Gleichungssystem $Ax=b$ (*) für $x \in \mathbb{R}^n$. Es sei $b=(1,2,3)^t$. Dann gilt:

- ☐ Mit $A=\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ hat (*) genau eine Lösung
- ☐ Mit $A=\left(\begin{smallmatrix} 1&1\\2&2\\4&4\end{smallmatrix}\right)$ hat (*) unendlich viele Lösungen
- ☐ Mit $A=\left(\begin{smallmatrix} 1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ hat (*) unendlich viele Lösungen
- ☐ Mit $A=\left(\begin{smallmatrix} 1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{smallmatrix}\right)$ hat (*) genau eine Lösung.

Lösung:

(a) (**2-B**) Seien $f: A \to B$, $g: B \to C$ Abbildungen.

- ✓ g nicht surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ nicht surjektiv.
- ✓ f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv
- × $g \circ f$ bijektiv $\Rightarrow f, g$ bijektiv
- × f surjektiv, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

(b) (**2-A**) Sei $F: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, (f,g) \mapsto f \circ g$ und $B=\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ bijektiv}\}$.

- ✓ F ist surjektiv
- × F ist injektiv
- ✓ $F(B \times B) = B$
- × Das Bild der Menge $\{(g, g^{-1}) : g \in B\}$ unter F hat unendlich viele Elemente

(c) (**1-S**) Für jede abelsche Gruppe $(G,+)$ mit neutralem Element e_G gilt:

- ✓ $\forall x \in G : \exists y \in G : x+y=e_G$
- × $\exists x \in G : \forall y \in G : x+y=e_G$
- × $\forall x \in G : x+x=e_G$
- × $\exists x \in G : x+x \neq e_G$

(d) (**2-I**) Für die symmetrische Gruppe S_4 und die Elemente $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\end{pmatrix}$ gilt:

- × S_4 ist abelsch
- × $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix}1&3&4&2\end{pmatrix}$
- ✓ $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}4&3&2&1\end{pmatrix}$
- ✓ Es gibt $\sigma_2 \in S_4$ mit $\sigma_2 \circ \sigma = ()$.

(e) (**3-S**) Es gilt:

- × F_{51} ist ein Körper
- ✓ F_6 ist ein kommutativer Ring mit 1
- ✓ In F_7 gilt $5 \cdot_7 5 = 4$
- ✓ Es gibt Nullteiler in F_{18}

(f) (**1-W**) Sei K ein Körper und $v_1, v_2 \in K^2$. Dann ist (v_1, v_2) genau dann eine Basis von K^2, wenn:

- × $v_1 \neq v_2$
- ✓ $v_1 \neq 0$ und $\lambda v_1 \neq v_2$ für alle $\lambda \in K$
- × $\lambda_1 v_1 \neq \lambda_2 v_2$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$
- × $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \neq 0$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K \backslash \{0\}$

(g) (**3-E**) Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, ..., v_n \in V$ Vektoren, so dass $\operatorname{Lin}((v_1, ..., v_n)) = V$. Dann ist

- ✓ $(v_1, ..., v_n)$ ein Erzeug.-System von V
- ✓ V ein endlich-dimensionaler K-VR
- × $\dim_K(V) = n$
- ✓ $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig, falls $n = \dim_K(V)$.

(h) (**2-C**) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 5$ und $U_1, U_2 \subset V$ zwei UVR mit $\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = \dim_{\mathbb{R}}(U_2) = 3$. Was ist möglich?

- × $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) = 6$
- × $U_1 \oplus U_2 = V$
- ✓ $U_1 \cup U_2$ ist ein UVR von V.
- ✓ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = 1$.

(i) (**3-H**) Seien U_1, U_2 UVR von V. Dann gilt stets

- ✓ $\dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim(U_2)$
- ✓ $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(V) \Rightarrow U_1 \subset U_2$
- × $\dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1) \Rightarrow U_2 \subset U_1$
- ✓ $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim(V)$ $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

(j) (**2-S**) Es gilt:

- ✓ $\text{Zeilenrang}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right)\right) = 2$
- × $\text{Zeilenrang}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\right) = 2$
- × $\text{Zeilenrang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$,
- ✓ $\text{Zeilenrang}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$

(k) (**4-E**) Sei K ein Körper und $f : K^{45} \to K^{23}$ sei eine K-lineare Abbildung. Dann gilt:

- ✓ f surjektiv $\Rightarrow \dim_K(\operatorname{Kern}(f)) = 22$
- ✓ f injektiv $\Rightarrow f$ ist Isomorphismus
- ✓ $\dim_K(\operatorname{Kern}(f)) = 30$ ist möglich
- ✓ Es gibt UVR $U \subset K^{45}$ mit $U \cong K^{23}$.

(l) (**2-L**) Wir betrachten das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ (*) für $x \in \mathbb{R}^n$. Es sei $b = (1, 2, 3)^t$. Dann gilt:

- ✓ Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat (*) genau eine Lösung
- × Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ hat (*) unendlich viele Lösungen
- ✓ Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat (*) unendlich viele Lösungen
- × Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ hat (*) genau eine Lösung.

Lösungswort: **Basiswechsel**

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **10. Januar 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`

10. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P37 (Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus).
Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \quad b := \begin{pmatrix} y \\ 4 \\ -y \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$ in Abhängigkeit von x und y.

Lösung:
Wir lösen das LGS $Ax = b$ für $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$. Zur Lösung des LGS bringen wir $A|b$ auf strenge Zeilenstufenform:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} x & 1 & -1 & y \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -y \end{array}\right) \overset{Z1 \leftrightarrow Z3, x\cdot Z1 + Z3 \to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1-x & -1 & y(1-x) \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)Z1 \to Z1, (1/2)Z2 \to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-x & -1 & y(1-x) \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)Z2 + Z1 \to Z1, (x-1)Z2 + Z3 \to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y-2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -x & (1-x)(y-2) \end{array}\right) =: A'|b'$$

(i) Fall $x = 0$:

$$A'|b' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y-2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & y-2 \end{array}\right)$$

- Fall $y \neq 2$:
  $\Longrightarrow$ $\text{Zeilenrang}(A') = 2 \neq 3 = \text{Zeilenrang}(A'|b')$
  $\Longrightarrow$ $\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(A', b') = \emptyset$ nach Satz 10.5.
- Fall $y = 2$:

$$A'|b' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  $\Longrightarrow$ $\text{Zeilenrang}(A') = 2 = \text{Zeilenrang}(A'|b')$
  Es existieren Lösungen.
  Algorithmus zur Lösung inhomogener LGS: Hier ist $r = 2$, die Position der Pivotelemente $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$. Eine spezielle Lösung ist daher gegeben durch $v_{j_i} = b'_i$

$(i = 1, 2)$, wobei der Rest von v mit Nullen aufgefüllt wird. Eine spezielle Lösung ist also:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei B die Matrix, welche aus A' durch Streichen der Spalten j_1, j_2 und aller Nullzeilen hervorgeht:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis von $\text{Lös}(A', 0)$ ist dann gegeben durch $w = (w_1, w_2, w_3)^t \in \mathbb{R}^3$, wobei

$$(w_{j_1}, w_{j_2}) = (w_1, w_2) = 1. \text{ Spalte von } -B \text{ und } (w_3) = e_1 = (1) \in \mathbb{R},$$

d.h.

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen von $Ax = b$ sind also gegeben durch den 1–dimensionalen affinen Unterraum

$$\text{Lös}(A|b) = \text{Lös}(A'|b') = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Fall $x \neq 0$:

$$A'|b' \overset{(-1/x)Z3 \to Z3, Z3+Z2 \to Z2, (-1)Z3+Z1 \to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y - 2 - \frac{x-1}{x}(y-2) \\ 0 & 1 & 0 & 2 + \frac{x-1}{x}(y-2) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x-1}{x}(y-2) \end{array} \right) =: A^*|b^*$$

$\implies$ Zeilenrang$(A'|b') = 3 =$ Zeilenrang$(A^*|b^*)$
$\implies$ Die Lösung ist eindeutig bestimmt durch

$$\text{Lös}(A|b) = \text{Lös}(A'|b') = \text{Lös}(A^*|b^*) = \left\{ \frac{1}{x} \begin{pmatrix} y-2 \\ 2 + xy - y \\ (x-1)(y-2) \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe P38 (Bestimmung inverser Matrizen).

Das folgende Vorgehen ist eine Standardmethode zur Bestimmung der Inversen A^{-1} einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$:

Algorithmus
Falls A mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n überführt werden kann, so ist A invertierbar und dieselben Zeilenumformungen angewandt auf E_n liefern die inverse Matrix A^{-1}.
Begründung: Laut Voraussetzung liefern elementare Zeilenumformungen eine Matrix $S \in GL(n, K)$ *mit* $S \cdot A = E_n$. *Es folgt direkt* $A \cdot S = (S^{-1}S)AS = S^{-1}(SA)S = S^{-1}E_nS = E_n$, *d.h.* A *ist invertierbar. Wegen* $S \cdot E_n = A^{-1}$ *folgt die angegebene Berechnungsformel von* A^{-1}.

Entscheiden Sie bei folgenden Matrizen jeweils, ob diese über den angegebenen Körpern invertierbar sind und bestimmen Sie im Falle der Existenz die Inversen:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{Q}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, F_5)$,

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Lösung:

(a) Wir wenden den beschriebenen Algorithmus an. Schreibe dazu die zu invertierende Matrix mit der Einheitsmatrix E_3 wie folgt auf und wende dieselben elementaren Zeilenumformungen auf beide Matrizen gleichzeitig an, bis auf der linken Seite E_3 steht:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{=:A_1|E_3} \overset{(-3)Z1+2(Z2)\to Z2, (-x)Z1+2Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2-x & 4-x & -x & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-(2-x))Z2+Z3\to Z3,}{\rightsquigarrow} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6-2x & 6-4x & 2x-4 & 2 \end{array}\right)}_{=:A_1'|B}$$

- Fall $x = 3$: Zeilenrang$(A_1) =$ Zeilenrang$(A_1') = 2 < 3$.
  $\overset{\text{Aufgabe 28 (b)(ii)}}{\Longrightarrow}$ A_1 ist nicht invertierbar.

- Fall $x \neq 3$: Forme weiter um:

$$A_1'|B \overset{((1/(6-2x)))Z3\to Z3,}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-2x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \end{array}\right)$$

$$\overset{Z3+Z2\to Z2, Z3+(-1)Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 0 & \frac{-x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-6}{3-x} & \frac{4-x}{3-x} & \frac{1}{3-x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-2x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \end{array}\right)$$

$$\overset{Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & \frac{-6}{3-x} & \frac{2}{3-x} & \frac{2}{3-x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-6}{3-x} & \frac{4-x}{3-x} & \frac{1}{3-x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-2x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1/2)Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3-x} & \frac{-1}{3-x} & \frac{-1}{3-x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-6}{3-x} & \frac{4-x}{3-x} & \frac{1}{3-x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-2x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \end{array}\right)$$

Damit lautet die Inverse:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{3-x} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ x-6 & 4-x & 1 \\ 3-2x & x-2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Unsere Ausgangsmatrix sieht in F_5 wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir gehen vor wie in Teilaufgabe (a). Alle Rechnenoperation sind bereits dem Körper F_5 angepasst.

$$A_2|E_3 := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2Z1+Z2\to Z2, 3Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{3Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{4Z3+Z1\to Z1, 2Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Damit lautet die Inverse:

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Wir wenden wieder den beschriebenen Algorithmus an. Schreibe dazu die zu invertierende Matrix mit der Einheitsmatrix E_2 wie folgt auf und wende dieselben elementaren Zeilenumformungen auf beide Matrizen gleichzeitig an, bis auf der linken Seite E_2 steht:

$$A_3|E_2 := \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Fall 1: $a = c = 0$, so ist offensichtlich Zeilenrang$(A_3) = 1 < 2$.
Aufgabe 28(b)(ii) $\Rightarrow$ A_3 nicht invertierbar.
Fall 2: $a \neq 0$ oder $c \neq 0$.
OBdA. sei im Folgenden $a \neq 0$. Dann ist:

$$A_3|E_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{a\cdot Z2\to Z2, (-c)Z1+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) =: A_3'|B$$

- Fall 2.1.: $ad - bc = 0$: Zeilenrang$(A_3) =$ Zeilenrang$(A_3') = 1 < 2$
  Aufgabe 28 (b)(ii) $\Longrightarrow$ A_3 nicht invertierbar.
- Fall 2.2.: $ad - bc \neq 0$: Wir formen weiter um:

$$A_3'|B \overset{(1/(ad-bc))Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\overset{(-b)Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\overset{(1/a)Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right).$$

Damit gilt:

$$A_3^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung: Der Fall 1 ($a = c = 0$) ist im Fall 2.1 ($ad - bc = 0$) enthalten. Daher gibt es tatsächlich nur folgende zwei Fälle:

- Fall $ad - bc = 0$: Die Matrix A_3 ist nicht invertierbar.
- Fall $ad - bc \neq 0$: A_3 ist invertierbar mit $A_3^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Aufgabe P39 (Nachweise mit affinen Unterräumen).

Sei V ein K-Vektorraum und X, Y affine Unterräume von V. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Entweder $X \cap Y = \emptyset$ oder $X \cap Y$ ist wieder ein affiner Unterraum von V.

(b) $X \cup Y$ ist wieder ein affiner Unterraum von V.

(c) Jeder Untervektorraum U von V ist ein affiner Unterraum.

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr.
Es gelte $X \cap Y \neq \emptyset$. Wir zeigen nun, dass $X \cap Y$ affiner Unterraum von V ist.
$X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow$ Es gibt $v \in X \cap Y \Rightarrow v \in X$ und $v \in Y$. (*)
X, Y affiner Unterräume, (*) $\Rightarrow$ Es gibt UVR $U_1, U_2 \subset V$ mit $X = v + U_1$, $Y = v + U_2$.
Wir zeigen: $X \cap Y = v + U_1 \cap U_2$ (damit ist $X \cap Y$ affiner Unterraum, da $U_1 \cap U_2$ UVR von V).

- „$\subset$": Sei $x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X$, $x \in Y$
$\Rightarrow$ Es gibt $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $x = v + u_1 = v + u_2$.
$\Rightarrow U_1 \ni u_1 = u_2 \in U_2 \Rightarrow u_1 \in U_1 \cap U_2$
$\Rightarrow x = v + u_1 \in v + U_1 \cap U_2$.
- „$\supset$": Sei $x \in v + U_1 \cap U_2$.
$\Rightarrow$ Es gibt $u \in U_1 \cap U_2$ mit $x = v + u$
$\Rightarrow x \in v + U_1 = X$, $x \in v + U_2 = Y \Rightarrow x \in X \cap Y$.

(b) Die Aussage ist falsch.
Wähle $V = \mathbb{R}^2$ über $K = \mathbb{R}$, $X = \mathrm{Lin}((1,0))$ und $Y = \mathrm{Lin}((0,1))$.
Dann sind X, Y als Untervektorräume auch affine Unterräume.
Aber $X \cup Y$ ist kein affiner Unterraum, denn:
Angenommen, $X \cup Y$ ist affiner Unterraum. $(1,0) \in X \cup Y \Rightarrow$ Es gibt UVR $U \subset V$ mit $X \cup Y = (1,0) + U$.
$(0,1), (2,0) \in X \cup Y \Rightarrow$ Es gibt $u_1, u_2 \in U$ mit $(0,1) = (1,0) + u_1$ und $(2,0) = (1,0) + u_2$
$\Rightarrow (-1,1) = u_1, (1,0) = u_2 \in U$.
$\overset{U \text{ UVR}}{\Rightarrow} (0,1) = u_1 + u_2 \in U$
$\Rightarrow (1,1) = (1,0) + (0,1) \in (1,0) + U = X \cup Y$, Widerspruch!

(c) Die Aussage ist wahr.
Es gilt nämlich $U = 0 + U$ mit $0 \in V$ dem Nullvektor.

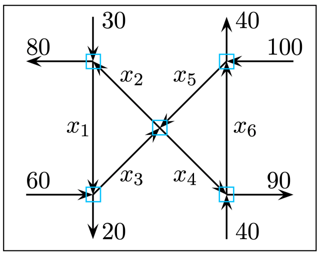
Aufgabe P40 (Lineare Gleichungssyteme und Verkehrsströme).

Wir betrachten den motorisierten Straßenverkehr und dessen Verkehrsströme an fünf Kreuzungen (in der unteren Abbildung durch blaue Quadrate markiert). Fahrzeuge, die in eine Kreuzung hineinfahren, werden an der Kreuzung als postiver Zufluss bewertet. Fahrzeuge, welche die Kreuzung verlassen, entsprechend als negativer Zufluss.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssytem (LGS) für die Verkehrsströme $x_1, ..., x_6 \in \mathbb{R}$ im angegebenen Streckennetz (s. Abbildung) auf.

(b) Ermitteln Sie die möglichen Verkehrsströme in den Teilstücken $x_1, ..., x_6$, indem Sie die Lösungsmenge des LGS aus (a) bestimmen.

(c) Schreiben Sie den in (b) ermittelten Lösungsraum in der Form $v + U$ mit $v \in V$, $U \subset V$ UVR. Interpretieren Sie den Lösungsraum hinsichtlich der anschaulichen Bedeutung: Welche Veränderungen der Lösung v sind durch Addition von Elementen aus U nur möglich?



Lösung:

(a) Wir betrachten exemplarisch die Bewertung von Zu– und Abfahrt an der Kreuzung oben links und in der Mitte:

- Für die Kreuzung oben links erhalte: Die Zufahrt wird mit $x_2 + 30$ und die Abfahrt mit $-80 - x_1$ bewertet.
  Insgesamt gilt daher $0 = x_2 + 30 - 80 - x_1$.
- Für die Kreuzung in der Mitte erhalte: Die Zufahrt wird mit $x_3 + x_5$ und die Abfahrt mit $-x_4 - x_2$ bewertet.
  Insgesamt gilt daher $0 = x_3 + x_5 - x_4 - x_2$.

Analoge Betrachtung ergibt für die Kreuzung unten links, oben rechts und unten rechts:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & = & x_1 & + & 60 & - & 20 & - & x_3 \\ 0 & = & x_6 & + & 100 & - & 40 & - & x_5 \\ 0 & = & x_4 & + & 40 & - & 90 & - & x_6 \end{array}$$

Damit erhalten wir folgendes LGS:

$$Ax := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ -40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} =: b$$

(b) Zur Lösung des LGS bringen wir $A|b$ nun in strenge Zeilenstufenform:

$$
\begin{aligned}
A|b &= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \end{array}\right) \\
&\overset{Z2+Z1\to Z1,(-1)Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z3\to Z_3,(-1)Z3+Z1\to Z1,(-1)Z3+Z2\to Z2,(-1)Z3+Z5\to Z5}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z4+Z5\to Z5}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\overset{Z4+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \underbrace{\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{=:A'|z}
\end{aligned}
$$

Algorithmus zur Lösung inhomogener LGS: Hier ist $r = 4$, die Position der Pivot-Elemente entspricht $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 4, 5)$.
Eine spezielle Lösung ist daher gegeben durch $v_{j_i} = z_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, wobei der Rest von v aus Nullen besteht:

$$v = \begin{pmatrix} -40 \\ 10 \\ 0 \\ 50 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei B die Matrix, welche aus A' durch Streichen der Spalten j_1, j_2, j_3, j_4 und der Nullzeilen hervorgeht:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eine Basis von Lös$(A,0)$ ist dann durch (w_1, w_2), wobei

- $(w_{1j_1}, w_{1j_2}, w_{1j_3}, w_{1j_4}) = (w_{11}, w_{12}, w_{14}, w_{15}) =$ 1. Spalte von $-B$ und $(w_{13}, w_{16}) = e_1 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, und
- $(w_{2j_1}, w_{2j_2}, w_{2j_3}, w_{2j_4}) = (w_{21}, w_{22}, w_{24}, w_{25}) =$ 2. Spalte von $-B$ und $(w_{23}, w_{26}) = e_2 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$,

d.h.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen von $Ax = b$ sind daher gegeben durch den 2-dimensionalen affinen Unterraum

$$\text{Lös}(A,z) = v + \text{Lös}(A,0) = \{v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Entsprechend der Darstellung aus (b) gilt:

$$\text{Lös}(A,z) = v + \underbrace{\text{Lös}(A,0)}_{=:U} = v + \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Elemente aus U können nur die Verkehrsströme x_1, x_2, x_3 oder x_4, x_5, x_6 gleichzeitig um dieselbe Menge erhöhen/verringern. Dies bedeutet anschaulich, dass die Menge der Fahrzeuge, welche *durch* die mittlere Kreuzung fahren, festgelegt ist und durch die durch U zusätzlich entstehenden Lösungen nicht verändert wird.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`