UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

10. Abgabeblatt

Aufgabe 37	Aufgabe 38	Aufgabe 39	Aufgabe 40	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 37 (Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus, 4 Punkte).

Für ein $a \in \mathbb{Q}$ sei gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}), \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{Q}).$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum $\text{Lös}(A, b)$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 38 (Bestimmung inverser Matrizen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Entscheiden Sie bei folgenden Matrizen jeweils, ob diese über den angegebenen Körpern invertierbar sind und bestimmen Sie im Falle der Existenz die Inverse. Nutzen Sie dafür das Resultat aus A28(b)(ii) bzw. den Algorithmus aus Aufgabe P38:

(a) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{Q}$,

(b) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, F_5)$,

(c) $A_3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

Aufgabe 39 (Charakterisierung affiner Unterräume, 4 = 3 + 1 Punkte).

Sei K ein Körper, V ein K−Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge.

(a) Es gelte $2 := 1 + 1 \neq 0$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) X ist ein affiner Unterraum von V.

(ii) $X \neq \emptyset$ und für alle $x, y \in X$, $\lambda \in K$ gilt $x + \lambda(y - x) \in X$.

(b) Zeigen Sie, dass die Bedingung $2 \neq 0$ aus (a) notwendig ist, indem Sie ein Beispiel für den F_2-Vektorraum $V = F_2^2$ finden, in welchem (ii) erfüllt ist, aber (i) nicht.

Aufgabe 40 (Lineare Gleichungssyteme und magische Quadrate, 4 = 1 + 2 + 0.5 + 0.5 Bonuspunkte).

Ein „Magisches 3×3-Quadrat" zur Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist eine Tafel aus 9 Feldern gefüllt mit reellen Zahlen, in welchem die Summe der Spalten, der Zeilen und der Diagonalen die gleiche Zahl λ ergibt:

a	d	g
b	e	h
c	f	i

In der folgenden Betrachtung schreiben wir ein magisches Quadrat als einen Vektor $x = (a, b, c, d, e, f, g, h, i)^t \in \mathbb{R}^9$.

(a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{8\times 9}$, sodass die Menge aller magischen Quadrate durch die Menge

$$U = \text{Lös}(A, z) = \{x = (a, b, c, d, e, f, g, h, i)^t \in \mathbb{R}^9 : A \cdot x = z\},$$

beschrieben wird, wobei $z := \lambda \cdot (1, ..., 1)^t \in \mathbb{R}^8$.

(b) Zeigen Sie mittels des Gauß-Algorithmus, dass $\dim_{\mathbb{R}} \text{Lös}(A, z) = 2$ und geben Sie alle magischen Quadrate in der Form

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline\end{array} + \mu_1 \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline\end{array} + \mu_2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline\end{array}$$

mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass

4	9	2
3	5	7
8	1	6

in $\text{Lös}(A, z)$ enthalten ist, indem Sie die passenden $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ aus (b) angeben. Es handelt sich um ein magisches Quadrat zur Zahl 15 gefüllt nur mit den Zahlen von 1-9, welche jeweils auch nur einmal vorkommen dürfen.

(d) Nutzen Sie die in (b) ermittelte Darstellung, um zu zeigen: Soll jede Zahl von 1-9 genau einmal in einem magischen Quadrat zur Zahl λ auftauchen, so muss $\lambda = 15$ gelten und in der Mitte eine 5 stehen.

Achtung: Weihnachtsaufgabe auf nächstem Blatt!

Aufgabe (Wiederholungs-Weihnachtsaufgabe, 12 Bonuspunkte).

Jede Teilaufgabe (a) - (l) gibt 1 Punkt, falls alle Kästchen richtig markiert sind oder 0.5 Punkte, falls nur ein Kästchen falsch markiert ist. *Kreuzen Sie jeweils nur die richtigen Aussagen an.* Zählen Sie dann die Anzahl der richtigen Antworten in der Teilaufgabe und wählen Sie den entsprechenden Buchstaben aus der Aufstellung (**0-A, 1-B, 2-C, 3-D, 4-E**) aus. Zusammen ergeben die Buchstaben ein Lösungswort.

(a) (**0-D, 1-D, 2-B, 3-L, 4-V**) Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen.

- ☐ g nicht surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ nicht surjektiv.
- ☐ f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv
- ☐ $g \circ f$ bijektiv $\Rightarrow f, g$ bijektiv
- ☐ f surjektiv, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

(b) (**0-I, 1-O, 2-A, 3-E, 4-E**) Sei $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, (f, g) \mapsto f \circ g$ und $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ bijektiv}\}$.

- ☐ F ist surjektiv
- ☐ F ist injektiv
- ☐ $F(B \times B) = B$
- ☐ Das Bild der Menge $\{(g, g^{-1}) : g \in B\}$ unter F hat unendlich viele Elemente

(c) (**0-E, 1-S, 2-T, 3-K, 4-M**) Für jede abelsche Gruppe $(G, +)$ mit neutralem Element e_G gilt:

- ☐ $\forall x \in G : \exists y \in G : x + y = e_G$
- ☐ $\exists x \in G : \forall y \in G : x + y = e_G$
- ☐ $\forall x \in G : x + x = e_G$
- ☐ $\exists x \in G : x + x \neq e_G$

(d) (**0-S, 1-T, 2-I, 3-E, 4-E**) Für die symmetrische Gruppe S_4 und die Elemente $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}$ gilt:

- ☐ S_4 ist abelsch
- ☐ $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$
- ☐ $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$
- ☐ Es gibt $\sigma_2 \in S_4$ mit $\sigma_2 \circ \sigma = ()$.

(e) (**0-N, 1-U, 2-R, 3-S, 4-O**) Es gilt:

- ☐ F_{51} ist ein Körper
- ☐ F_6 ist ein kommutativer Ring mit 1
- ☐ In F_7 gilt $5 \cdot_7 5 = 4$
- ☐ Es gibt Nullteiler in F_{18}

(f) (**0-S, 1-W, 2-M, 3-R, 4-N**) Sei K ein Körper und $v_1, v_2 \in K^2$. Dann ist (v_1, v_2) genau dann eine Basis von K^2, wenn:

- ☐ $v_1 \neq v_2$
- ☐ $v_1 \neq 0$ und $\lambda v_1 \neq v_2$ für alle $\lambda \in K$
- ☐ $\lambda_1 v_1 \neq \lambda_2 v_2$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$
- ☐ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \neq 0$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K \backslash \{0\}$

(g) (**0-G, 1-I, 2-R, 3-E, 4-I**) Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, ..., v_n \in V$ Vektoren, so dass $\mathrm{Lin}((v_1, ..., v_n)) = V$. Dann ist

- ☐ $(v_1, ..., v_n)$ ein Erzeug.-System von V
- ☐ V ein endlich-dimensionaler K-VR
- ☐ $\dim_K(V) = n$
- ☐ $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig, falls $n = \dim_K(V)$.

(h) (**0-O, 1-A, 2-C, 3-N, 4-S**) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 5$ und $U_1, U_2 \subset V$ zwei UVR mit $\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = \dim_{\mathbb{R}}(U_2) = 3$. Was ist möglich?

- ☐ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) = 6$
- ☐ $U_1 \oplus U_2 = V$
- ☐ $U_1 \cup U_2$ ist ein UVR von V.
- ☐ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = 1$.

(i) (**0-R, 1-N, 2-A, 3-H, 4-E**) Seien U_1, U_2 UVR von V. Dann gilt stets

- ☐ $\dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim(U_2)$
- ☐ $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(V) \Rightarrow U_1 \subset U_2$
- ☐ $\dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1) \Rightarrow U_2 \subset U_1$
- ☐ $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim(V)$ $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

(j) (**0-A, 1-U, 2-S, 3-N, 4-A**) Es gilt:

- ☐ Zeilenrang$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right)\right) = 2$
- ☐ Zeilenrang$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\right) = 2$
- ☐ Zeilenrang$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$,
- ☐ Zeilenrang$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$

(k) (**0-U, 1-L, 2-M, 3-T, 4-E**) Sei K ein Körper und $f : K^{45} \to K^{23}$ sei eine K-lineare Abbildung. Dann gilt:

- ☐ f surjektiv $\Rightarrow \dim_K(\mathrm{Kern}(f)) = 22$
- ☐ f injektiv $\Rightarrow f$ ist Isomorphismus
- ☐ $\dim_K(\mathrm{Kern}(f)) = 30$ ist möglich
- ☐ Es gibt UVR $U \subset K^{45}$ mit $U \cong K^{23}$.

(l) (**0-E, 1-E, 2-L, 3-E, 4-M**) Wir betrachten das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ (*) für $x \in \mathbb{R}^n$. Es sei $b = (1, 2, 3)^t$. Dann gilt:

- ☐ Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat (*) genau eine Lösung
- ☐ Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ hat (*) unendlich viele Lösungen
- ☐ Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat (*) unendlich viele Lösungen
- ☐ Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ hat (*) genau eine Lösung.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **10. Januar 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`