Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

9. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 33	Aufgabe 34	Aufgabe 35	Aufgabe 36	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 33 (Nachrechnen von Eigenschaften linearer Abbildungen des K^n, $4 = 1.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5$ Punkte).
Gegeben seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad w_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\ w_2 \begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Es ist bekannt, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Wir definieren die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\varphi(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$ (vgl. Aufgabe P31 (a)).

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ und geben Sie $\text{Rang}(\varphi)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\varphi))$.

(c) Zeigen Sie (ohne Nutzung von (d)) die Isomorphie $U := \text{Bild}(\varphi) \cong \mathbb{R}^2$ von Vektorräumen.

(d) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\2x_2 - x_1\end{pmatrix}$ ein Isomorphismus ist.

Lösung:

(a) Bestimme eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$: Es gilt

$$\begin{aligned}\text{Bild}(\varphi) &= \varphi(\mathbb{R}^3) \overset{(v_1,v_2,v_3)\text{ Basis von }\mathbb{R}^3}{=} \varphi(\text{Lin}(v_1, v_2, v_3)) \\ &\overset{\text{Eig. lin. Abb.}}{=} \text{Lin}(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3)) = \text{Lin}(w_1, w_2, w_3).\end{aligned}$$

Es genügt also, eine Basis von $\text{Lin}(w_1, w_2, w_3)$ zu bestimmen. Dies machen wir wie üblich mit dem Gauß-Algorithmus (schreibe w_1, w_2, w_3 als Zeilen in Matrix und bringe diese auf

Zeilenstufenform):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z1\leftrightarrow Z3, Z2\leftrightarrow Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2Z1+Z2\to Z2, 3Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-2)Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist

$$B = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Rang}(\varphi) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\varphi)) = 2$

(b) Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 9.13)

$$\Longrightarrow \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \dim_{\mathbb{R}}(V) - \mathrm{Rang}(\varphi) = 3 - 2 = 1.$$

(c) Es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) \overset{(a)}{=} 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) \overset{\text{Kor. 9.14}}{\Longrightarrow} U \cong \mathbb{R}^2$.

(d) 1. Möglichkeit (zeige f injektiv, d.h. $\mathrm{Kern}(f) = 0$): Wir nutzen P36(a). Das heißt, wir bestimmen $\mathrm{Kern}(F)$ von

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

und benutzen dann $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(F) \cap U$.

- Bestimmung von $\mathrm{Kern}(F)$: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gilt:

$$F(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overset{Z1+Z2\to Z2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\overset{\text{2. Zeile}}{\Longrightarrow} x_2 = 0 \overset{\text{1. Zeile}}{\Longrightarrow} x_1 = 0.$

Wir haben gezeigt:

$$\mathrm{Kern}(F) \subseteq \mathrm{Lin}(v_1), \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtung „$\supseteq$“ ist offensichtlich (es gilt $F(v_1) = 0$ und daher $F(\mathrm{Lin}(v_1)) = \mathrm{Lin}(F(v_1)) = 0$).

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Kern}(F) = \mathrm{Lin}(v_1)$

- Bestimmung von $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(F) \cap U$:

  (*Standardmethode: Löse Gleichungssystem zur Bestimmung des Schnitts zweier UVR, vgl. A18(c) - die hier benutzte Methode geht i.A. schneller und läuft auf dasselbe hinaus*).

  Seien u_1, u_2 die Basisvektoren von U (vgl. (a)) und v_1 der Basisvektor von $\mathrm{Kern}(F)$.

  $\Longrightarrow$ (u_1, u_2, v_1) sind linear unabhängig, denn:

  $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  ist bereits in Zeilenstufenform (keine Nullzeilen).

  $\Rightarrow (u_1, u_2, v_1)$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$

  $\overset{\text{Charakt. direkte Summe}}{\Rightarrow} \mathbb{R}^3 = U \oplus \mathrm{Kern}(F)$

  $\overset{\text{Def. direkte Summe}}{\Rightarrow} U \cap \mathrm{Kern}(F) = \{0\}$.

$\Longrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\} \Longrightarrow f$ ist injektiv.

$\overset{\dim_{\mathbb{R}}(U)=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)=2<\infty}{\Longrightarrow} f$ ist bijektiv, also ein Isomorphismus, nach Korollar 9.16.

2. Möglichkeit (zeige f surjektiv, d.h. $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}^2$): Nach (a) ist eine Basis von U gegeben durch (u_1, u_2) mit $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Es folgt:

$$\mathrm{Bild}(f) = f(\mathrm{Lin}((u_1, u_2)) = \mathrm{Lin}((f(u_1), f(u_2))) = \mathrm{Lin}((\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})) = \mathbb{R}^2.$$

Der letzte Schritt gilt, da die beiden Vektoren $(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^2$ offensichtlich keine Vielfachen voneinander und damit linear unabhängig sind (also eine Basis).

$\Rightarrow f$ surjektiv

$\overset{\dim_{\mathbb{R}}(U)=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)=2<\infty}{\Longrightarrow} f$ ist bijektiv, also ein Isomorphismus, nach Korollar 9.16.

Aufgabe 34 (Nachrechnen von Eigenschaften linearer Abbildungen des K^n, 4 = 0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermitteln Sie $A \in M(4 \times 3, \mathbb{R})$, so dass $\varphi = \tilde{A}$ gilt.

(b) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

(c) Untersuchen Sie mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, ob φ injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

(d) Sei $U := \mathrm{Lin}(e_2, e_3) \subseteq \mathbb{R}^3$. Weisen Sie nach, dass $\Phi = \varphi|_U : U \to \mathrm{Bild}(\varphi)$ ein Isomorphismus ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Lin}((1,3,1)^t)$.

(e) Geben Sie einen Isomorphismus $f : \mathrm{Bild}(\varphi) \to \mathbb{R}^2$ an.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ A ist die gesuchte Matrix, da in der i–ten Spalte der Matrix das Bild $\varphi(e_i)$ des i–ten Einheitsvektors e_i, $i = 1, 2, 3$, steht.

(b) Wir bestimmen eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$: Es gilt laut Vorlesung

$$\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Lin}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)) = \mathrm{Lin}(Ae_1, Ae_2, Ae_3)$$

Es genügt also, eine Basis von

$$\mathrm{Lin}(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix})$$

zu bestimmen. Das machen wir wie üblich mit dem Gauß–Algorithmus (schreibe die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und bringe diese auf Zeilenstufenform):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z1+Z2\to Z2, (-2)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\overset{3Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(c) (b) $\Rightarrow \dim_K \mathrm{Bild}(\varphi) = 2$.
Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\Rightarrow$

$$\dim_K \mathrm{Kern}(\varphi) = \dim_K(\mathbb{R}^3) - \dim_K \mathrm{Bild}(\varphi) = 3 - 2 = 1.$$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq \{0\}$ $\Longrightarrow$ φ ist nicht injektiv.
Weiterhin $\mathrm{Bild}(\varphi) \neq \mathbb{R}^4$ $\Longrightarrow$ φ ist nicht surjektiv.

(d) Bestimmung von $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathrm{Kern}(\varphi) \cap U$ (vgl. P36 (a)):

(*Standardmethode: Löse Gleichungssystem zur Bestimmung des Schnitts zweier UVR, vgl. A18(c) - die hier benutzte Methode geht i.A. schneller und läuft auf dasselbe hinaus*).
Seien e_2, e_3 die Basisvektoren von U und v_1 der Basisvektor von $\mathrm{Kern}(F)$ (vgl. Hinweis).
$\Longrightarrow$ (v_1, b_1, b_2) sind linear unabhängig, denn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist bereits in Zeilenstufenform (keine Nullzeilen).
$\Rightarrow$ (v_1, e_2, e_3) ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$
$\overset{\text{Charakt. direkte Summe}}{\Rightarrow} \mathbb{R}^3 = U \oplus \mathrm{Kern}(\Phi)$
$\overset{\text{Def. direkte Summe}}{\Rightarrow} U \cap \mathrm{Kern}(\Phi) = \{0\} \Longrightarrow \mathrm{Kern}(\Phi) = \{0\} \Longrightarrow \Phi$ ist injektiv.
$\overset{\dim_{\mathbb{R}}(U)=2=\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\varphi))<\infty}{\Longrightarrow} \Phi$ ist Isomorphismus

2. Möglichkeit (vgl. A33(d)): Es gilt $\mathrm{Bild}(\Phi) = \Phi(U) = \Phi(\mathrm{Lin}((e_2, e_3)) = \mathrm{Lin}((\Phi(e_2), \Phi(e_3))) =$
$\mathrm{Lin}((z_1, z_2))$ mit $z_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $z_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(z_1, z_2) ist offensichtlich linear unabhängig (Vektoren sind keine Vielfachen voneinander)
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lin}((z_1, z_2)) = 2$.
$\mathrm{Lin}((z_1, z_2)) \subset \mathrm{Bild}(\phi), \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lin}((z_1, z_2)) = 2 \overset{(b)}{=} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Bild}(\phi) \overset{5.17}{\Rightarrow} \mathrm{Bild}(\Phi) = \mathrm{Lin}((z_1, z_2)) =$ $\mathrm{Bild}(\phi)$
$\Rightarrow \Phi$ surjektiv

$\overset{\dim_{\mathbb{R}}(U)=2=\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\varphi))<\infty}{\Longrightarrow} \Phi$ ist Isomorphismus.

(e) Sei (b_1, b_2) die in (b) ermittelte Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$.
P31(a) $\Longrightarrow$ Es gibt eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : \mathrm{Bild}(\varphi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(b_i) = e_i \quad i = 1, 2.$$

Da f Basen auf Basen abbildet, ist f ein Isomorphismus.

(*Langversion, nicht verlangt:*
Bild$(f) = f(\mathit{Lin}((b_1, b_2))) = \mathit{Lin}((f(b_1), f(b_2)) = \mathit{Lin}((e_1, e_2)) = \mathbb{R}^2$
$\Longrightarrow$ *f surjektiv* $\overset{\mathit{dim}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\varphi))=2=\mathit{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)}{\Longrightarrow}$ *f Isomorphismus.*)

Aufgabe 35 (Lineare Abbildungen auf Polynomräumen, 4 = 3 + 1 Punkte).
Für $D \in \mathbb{N}$ sei

$$P_D := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, a_0, ..., a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{D} a_k x^k\}$$

der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens D. Es ist bekannt aus A22: $\dim_{\mathbb{R}} P_D = D + 1$ und $(p_0, ..., p_D)$ mit $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p_i(x) = x^i$ $(i = 0, ..., D)$ ist eine Basis von P_D. Wir definieren zwei lineare Abbildungen

(i) $\varphi : P_3 \to P_2, (\varphi(p))(x) := p'(x)$ (Ableitung),

(ii) $\varphi : P_3 \to \mathbb{R}^3, p \mapsto (p(0), p(1), p(2))$ (Einsetzabbildung).

Lösen Sie jeweils für (i), (ii) die folgenden Aufgaben:

(a) Bestimmen Sie Kern(φ) und Bild(φ).

(b) Überprüfen Sie, ob φ injektiv, surjektiv oder sogar ein Isomorphismus ist.

Lösung:

(a) (i)

- Bestimme Kern(φ): Sei $p \in P_3$ mit $\varphi(p) = 0$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $a_0, ..., a_3 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k$.
  $\overset{p'=\varphi(p)=0}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{R} : 0 = p'(x) = \sum_{k=1}^{3} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$ (*).
  $\Rightarrow 0 = a_1 p_0 + 2a_2 p_1 + 3a_3 p_2$
  $\overset{(p_0,...,p_3) \text{ Basis}}{\Rightarrow} a_1 = 2a_2 = 3a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
  $\Rightarrow p = a_0 p_0$. Damit ist gezeigt: Kern(φ) $\subset$ Lin(p_0).
  Aus obiger Rechnung (*) folgt auch sofort: Lin(p_0) $\subset$ Kern(φ), d.h. Kern(φ) = Lin(p_0).
- Bestimme Bild(φ): Es gilt

  $$\text{Bild}(\varphi) = \varphi(P_3) = \varphi(\text{Lin}(\{p_0, ..., p_3\})) = \text{Lin}(\{\varphi(p_0), ..., \varphi(p_3)\}).$$

  Hier gilt (simples Ableiten): $\varphi(p_0) = 0$, $\varphi(p_1) = p_0$, $\varphi(p_2) = 2p_1$, $\varphi(p_3) = 3p_2$. Damit folgt:

  $$\begin{aligned}\text{Bild}(\varphi) &= \text{Lin}(\{\varphi(p_0), ..., \varphi(p_3)\}) = \text{Lin}(\{0, p_0, 2p_1, 3p_2\}) \\ &\overset{2,3 \text{ invert. in } \mathbb{R}}{=} \text{Lin}(\{p_0, p_1, p_2\}) = P_2\end{aligned}$$

(ii)

- Bestimme Kern(φ): Sei $p \in P_3$ mit $\varphi(p) = 0$. Dann existieren $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x_i$. Es gilt

  $$\varphi(p) = 0 \iff (p(0), p(1), p(2)) = 0 \iff p(0) = 0, p(1) = 0, p(2) = 0$$

  $\Longrightarrow$
  $a_0 = p(0) = 0$,
  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = p(1) = 0$,
  $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = p(2) = 0$.

  $\Longrightarrow$
  $a_0 = 0$,
  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$,
  $2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$.

  $\overset{\text{Add. (-2)-mal 2. Zeile auf 3. Zeile}}{\Longrightarrow}$ (I) $a_0 = 0$,
  (II) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$,
  (III) $2a_2 + 6a_3 = 0$.
  $\Longrightarrow a_0 = 0 \overset{(III)}{\Rightarrow} a_2 = -3a_3 \overset{(II)}{\Rightarrow} a_1 = 2a_3$.

  $\Rightarrow p = 2a_3 p_1 - 3a_3 p_2 + a_3 p_3 = a_3(2p_1 - 3p_2 + p_3)$
  $\Rightarrow$ Kern(φ) $\subset$ Lin($\{2p_1 - 3p_2 + p_3\}$).

Richtung „⊃": $p \in \mathrm{Lin}(\{2p_1 - 3p_2 + p_3\})$
$\Rightarrow$ Es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $p = \lambda \cdot (2p_1 - 3p_2 + p_3)$.
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \lambda \cdot (2x - 3x^2 + x^3) = \lambda x(x-1)(x-2)$.
$\Rightarrow p(0) = p(1) = p(2) = 0$
$\Rightarrow p \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.
Insgesamt gezeigt: $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Lin}(2p_1 - 3p_2 + p_3)$
(Alternative: Mit der Basis $(q_0, ..., q_3)$ von P_D aus A22 kann $\mathrm{Kern}(\varphi)$ schneller bestimmt werden: Ein beliebiges $p \in P_3$ hat die Darstellung $p = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k q_k$. Es gilt dann $\phi(p) = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k \phi(q_k) = \lambda_0 \cdot (1,1,1) + \lambda_1 \cdot (0,1,2) + \lambda_2 \cdot (0,0,1) + \lambda_3 \cdot (0,0,0)$.
Daher tritt $\phi(p) = 0$ nur ein, falls $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ist
(Vektoren $(1,1,1), (0,1,2), (0,0,1)$ sind linear unabhängig). $\Rightarrow p = \lambda_3 \cdot q_3$ ...))

- Bestimme $\mathrm{Bild}(\varphi)$: Es gilt

$$\mathrm{Bild}(\varphi) = \varphi(P_3) = \varphi(\mathrm{Lin}(\{p_0, ..., p_3\})) = \mathrm{Lin}(\{\varphi(p_0), ..., \varphi(p_3)\}).$$

Einsetzen liefert:

$$\varphi(p_0) = (1,1,1),\ \varphi(p_1) = (0,1,2),\ \varphi(p_2) = (0,1,4),\ \varphi(p_3) = (0,1,8).$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus zur Bestimmung einer Basis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \overset{(-1)\cdot Z2+Z3\to Z3, (-1)\cdot Z2+Z4\to Z4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{(-3)\cdot Z3+Z4\to Z4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Lin}(\{\varphi(p_0), ..., \varphi(p_3)\}) = \mathrm{Lin}((1,1,1), (0,1,2), (0,0,2)) \overset{(*)}{=} \mathbb{R}^3$$

(Schritt (*): 3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$ bilden Basis des $\mathbb{R}^3$ und damit Erzeugendensystem).
$\Longrightarrow \mathrm{Bild}(\varphi) = \mathbb{R}^3$

(b) (i) Mit (a) (i) gilt:

- $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \varphi$ nicht injektiv.
(*Alternative: Die Aufgabe kann sogar ohne Berechnung des Kerns gelöst werden, da der Bildraum von geringerer Dimension als der Urbildraum ist: Nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen gilt*

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \dim_K(P_4) - \dim_K(\mathrm{Bild}(\varphi)) = 5 - 4 = 1,$$

$\Longrightarrow \mathrm{Kern}(\varphi) \neq \{0\} \Longrightarrow \varphi$ *ist nicht injektiv.*)
- $\mathrm{Bild}(\varphi) = P_2 \Rightarrow \varphi$ surjektiv.

(ii) Mit (a) (ii) gilt:

- $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq \{0\} \Longrightarrow \varphi$ ist nicht injektiv.
- $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \varphi$ ist surjektiv.

Aufgabe 36 (Beweise mit Kern/Bild linearer Abbildungen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei V ein endlich-dimensionaler K–Vektorraum über einem Körper K und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

(a) Es gelte $\varphi \circ \varphi = 0$. Zeigen Sie: $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi) \iff \dim_K(V) = 2\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi))$.

(b) Seien U, W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\psi \circ \psi = \psi$, welches die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$U = \mathrm{Kern}(\psi) \text{ und } W = \mathrm{Bild}(\psi)$$

Hinweis: Nehmen Sie sich eine Basis von V unter Nutzung von $V = U \oplus W$ und definieren Sie ψ auf dieser Basis (vgl. P31(a)).

Lösung:

(a) „$\Rightarrow$“: Dimensionsformel für lineare Abbildungen liefert:

$$\dim_K(V) = \dim_K \mathrm{Bild}(\varphi) + \dim_K \mathrm{Kern}(\varphi) \overset{\text{Vorauss. Bild}(\varphi)=\text{Kern}(\varphi)}{=} 2\dim_K \mathrm{Kern}(\varphi)$$

„$\Leftarrow$“:

(i) Wir zeigen zuerst $\mathrm{Bild}(\varphi) \subset \mathrm{Kern}(\varphi)$:
Sei $v \in \mathrm{Bild}(\varphi)$.
$\Rightarrow$ Es gibt $x \in V$ mit $v = \varphi(x)$.
$\Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\varphi(x)) = (\varphi \circ \varphi)(x) \overset{\text{Vorauss.}}{=} 0$
$\Rightarrow v \in \mathrm{Kern}(\phi)$.

(ii) (*Eigentlicher Ansatz: Wegen (i) ist nur noch Bild(φ) $\supset$ Kern(φ) zu zeigen. Da die gegebene Dimensionsvoraussetzung aber keine verwertbaren Informationen für eine elementweise Betrachtung, d.h. einen Beweis der Form $x \in$ Kern(φ) $\Rightarrow$ ... gibt, versuchen wir direkt ein Dimensionsargument.*)
Dimensionsformel für lineare Abbildungen liefert:

$$2\dim_K \mathrm{Kern}(\varphi) =\overset{\text{Vorauss.}}{=} \dim_K(V) = \dim_K \mathrm{Bild}(\varphi) + \dim_K \mathrm{Kern}(\varphi),$$

d.h. $\dim_K \mathrm{Kern}(\varphi) = \dim_K \mathrm{Bild}(\varphi)$.
$\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$ (aus (i)), und $\mathrm{Kern}(\varphi), \mathrm{Bild}(\varphi)$ sind UVR $\overset{\text{Satz aus VL}}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(b) **Existenz:** Sei $(u_1, ..., u_n)$ Basis von U, $(w_1, ..., w_m)$ Basis von W
$\overset{V=U\oplus W}{\Rightarrow}$ $(u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m)$ Basis von V.
Definiere $\psi : V \to V$ durch

$$\psi(u_i) := 0 \quad (i = 1, ..., n), \qquad \psi(w_j) := w_j \quad (j = 1, ..., m).$$

Wegen P31(a) ist damit eine (eindeutige) lineare Abbildung definiert.
Offensichtlich gilt: $\psi \circ \psi = \psi$.
Weiter:

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\psi) &= \psi(\mathrm{Lin}(u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m)) \\ &\overset{\text{Eig. lin. Abb.}}{=} \mathrm{Lin}(\{\psi(u_1), ..., \psi(u_n), \psi(w_1), ..., \psi(w_m)\}) \\ &= \mathrm{Lin}(\{0, ..., 0, w_1, ..., w_m\}) \\ &= \mathrm{Lin}(\{w_1, ..., w_m\}) \overset{(w_1, ..., w_m) \text{ Basis von } W}{=} W. \end{aligned}$$

Bestimmung des Kerns: Wir zeigen $\mathrm{Kern}(\psi) = U$.

- „$\subset$“: Sei $v \in \mathrm{Kern}(\psi)$.
  $\Rightarrow v \in V$ mit $\psi(v) = 0$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_m \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^m \mu_j w_j$.
  $\overset{\psi \text{ linear}}{\Rightarrow} 0 = \psi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(u_i) + \sum_{j=1}^m \mu_j \psi(w_j) \overset{\text{Def. } \psi}{=} \sum_{j=1}^m \mu_j w_j$.
  $\overset{(w_1, ..., w_m) \text{ lin. unabh.}}{\Rightarrow} \mu_1 = ... = \mu_m = 0$.
  $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in \mathrm{Lin}(\{u_1, ..., u_n\}) = U$.
- „$\supset$“: Sei $v \in U$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$
  $\overset{\psi \text{ linear}}{\Rightarrow} \psi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(u_i) \overset{\text{Def. } \psi}{=} 0$
  $\Rightarrow v \in \mathrm{Kern}(\psi)$.

Eindeutigkeit: Sei $\tilde{\psi} \in \mathrm{End}_K(V)$ eine weitere Abbildung mit $U = \mathrm{Kern}(\tilde{\psi})$, $W = \mathrm{Bild}(\tilde{\psi})$ und $\tilde{\psi} \circ \tilde{\psi} = \tilde{\psi}$.
Dann gilt für $i = 1, ..., n$:

$$\tilde{\psi}(u_i) \overset{\mathrm{Kern}(\tilde{\psi})=U}{=} 0.$$

Sei $j \in \{1, ..., m\}$.
$\overset{\mathrm{Bild}(\tilde{\psi})=W}{\Rightarrow}$ Es gibt $v \in V$ mit $\tilde{\psi}(v) = w_j$.
$\Rightarrow w_j = \tilde{\psi}(v) \overset{\tilde{\psi}\circ\tilde{\psi}=\tilde{\psi}}{=} \tilde{\psi}(\tilde{\psi}(v)) = \tilde{\psi}(w_j)$.
Damit ist gezeigt, dass auch $\tilde{\psi}$ erfüllt:

$$\tilde{\psi}(u_i) = 0 \quad (i = 1, ..., n), \qquad \tilde{\psi}(w_j) = w_j \quad (j = 1, ..., m).$$

Aufgabe P31(a) (Eindeutigkeit der Def. linearer Abbildungen auf Basen) $\Rightarrow \psi = \tilde{\psi}$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **20. Dezember 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`