UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

9. Abgabeblatt

Aufgabe 33	Aufgabe 34	Aufgabe 35	Aufgabe 36	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 33 (Nachrechnen von Eigenschaften linearer Abbildungen des K^n, $4 = 1.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5$ Punkte).

Gegeben seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist bekannt, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Wir definieren die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\varphi(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$ (vgl. Aufgabe P31 (a)).

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ und geben Sie $\text{Rang}(\varphi)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\varphi))$.

(c) Zeigen Sie (ohne Nutzung von (d)) die Isomorphie $U := \text{Bild}(\varphi) \cong \mathbb{R}^2$ von Vektorräumen.

(d) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 34 (Nachrechnen von Eigenschaften linearer Abbildungen des K^n, $4 = 0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 1$ Punkte).

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermitteln Sie $A \in M(4 \times 3, \mathbb{R})$, so dass $\varphi = \tilde{A}$ gilt.

(b) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

(c) Untersuchen Sie mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, ob φ injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

(d) Sei $U := \mathrm{Lin}(e_2, e_3) \subseteq \mathbb{R}^3$. Weisen Sie nach, dass $\Phi = \varphi|_U : U \to \mathrm{Bild}(\varphi)$ ein Isomorphismus ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Lin}((1, 3, 1)^t)$.

(e) Geben Sie einen Isomorphismus $f : \mathrm{Bild}(\varphi) \to \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 35 (Lineare Abbildungen auf Polynomräumen, 4 = 3 + 1 Punkte).
Für $D \in \mathbb{N}$ sei

$$P_D := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, a_0, ..., a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{D} a_k x^k\}$$

der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens D. Es ist bekannt aus A22: $\dim_{\mathbb{R}} P_D = D + 1$ und $(p_0, ..., p_D)$ mit $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p_i(x) = x^i$ $(i = 0, ..., D)$ ist eine Basis von P_D. Wir definieren zwei lineare Abbildungen

(i) $\varphi : P_3 \to P_2, (\varphi(p))(x) := p'(x)$ (Ableitung),

(ii) $\varphi : P_3 \to \mathbb{R}^3, p \mapsto (p(0), p(1), p(2))$ (Einsetzabbildung).

Lösen Sie jeweils für (i), (ii) die folgenden Aufgaben:

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

(b) Überprüfen Sie, ob φ injektiv, surjektiv oder sogar ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 36 (Beweise mit Kern/Bild linearer Abbildungen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei V ein endlich-dimensionaler K–Vektorraum über einem Körper K und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

(a) Es gelte $\varphi \circ \varphi = 0$. Zeigen Sie: $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi) \iff \dim_K(V) = 2\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi))$.

(b) Seien U, W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\psi \circ \psi = \psi$, welches die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$U = \mathrm{Kern}(\psi) \text{ und } W = \mathrm{Bild}(\psi)$$

Hinweis: Nehmen Sie sich eine Basis von V unter Nutzung von $V = U \oplus W$ und definieren Sie ψ auf dieser Basis (vgl. P31(a)).

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **20. Dezember 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`