8. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 29	Aufgabe 30	Aufgabe 31	Aufgabe 32	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 29 (Nachweise mit der Dimensionsformel, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Seien $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ Untervektorräume eines endlich–dimensionalen K–Vektorraumes V über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass die folgende Formel (*) im Allgemeinen falsch ist:

$$\begin{aligned}\dim_K(U_1+U_2+U_3) &= \dim_K(U_1)+\dim_K(U_2)+\dim_K(U_3)+\dim_K(U_1\cap U_2\cap U_3)\\ &\quad -\dim_K(U_1\cap U_2)-\dim_K(U_1\cap U_3)-\dim_K(U_2\cap U_3)\end{aligned}$$

Hinweis: Nutzen Sie $V=\mathbb{R}^2$ und drei (explizit anzugebende) UVR der Dimension 1.

(b) Zeigen Sie, dass unter der Annahme $U_1 \subseteq U_3$ die Formel (*) gilt.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass unter der Voraussetzung gilt: $(U_1+U_2)\cap U_3 = (U_1\cap U_3)+(U_2\cap U_3)$. Wenn Sie dies beweisen, erhalten Sie einen Bonuspunkt.

(c) Sei nun $n \geq 3$ und $\dim_K V = n$. Nutzen Sie die Dimensionsformel für Untervektorräume (und keine Basen), um folgende Aussagen zu zeigen:

(i) Gilt $\dim_K(U_1)+\dim_K(U_2) > n$, so folgt $U_1\cap U_2 \neq \{0\}$.

(ii) Gilt $\dim_K(U_1)=\dim_K(U_2)=\dim_K(U_3)=n-1$, so ist $\dim_K(U_1\cap U_2\cap U_3)\geq n-3$.

Lösung:

(a) Sei nun $K=\mathbb{R}$ und $V=\mathbb{R}^2$. Wir definieren folgende Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}), \qquad U_2 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}), \qquad U_3 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$$

$$\Longrightarrow\ U_1+U_2+U_3 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \mathbb{R}^2 \text{ (vgl. P30 (a)).}$$

$$\Longrightarrow\ \dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2+U_3) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2.$$

Andererseits gilt offensichtlich (Bild!) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, $U_1 \cap U_3 = \{0\}$ und $U_2 \cap U_3 = \{0\}$.

(Formal, nicht verlangt: Ist $v \in U_1 \cap U_3 \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$
$\Longrightarrow U_1 \cap U_3 \subset \{0\}$*).*
Es folgt

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{R}}(U_1) + \dim_{\mathbb{R}}(U_2) + \dim_{\mathbb{R}}(U_3) + \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \\ &\quad - \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) - \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_3) - \dim_{\mathbb{R}}(U_2 \cap U_3) \\ &= 1 + 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 3 \neq 2 = \dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2 + U_3). \end{aligned}$$

(b) Wir zeigen erst den Hinweis $(U_1 + U_2) \cap U_3 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$:

- „$\subset$“: (gilt nur wegen $U_1 \subset U_3$)
  Sei $u \in (U_1 + U_2) \cap U_3$
  $\Rightarrow u \in U_1 + U_2$ und $u \in U_3$
  $\Rightarrow$ Es gibt $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $u = u_1 + u_2$
  $\Rightarrow u_2 = \underbrace{u}_{\in U_3} - \underbrace{u_1}_{\in U_1 \subset U_3} \overset{U_3 \text{ UVR}}{\in} U_3 \Rightarrow u_2 \in U_2 \cap U_3$
  $\Rightarrow u = \underbrace{u_1}_{\in U_1 \subset U_3} + \underbrace{u_2}_{\in U_2 \cap U_3} \subset (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3).$
- „$\supset$“: (gilt immer)
  Sei $u \in (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$
  $\Rightarrow$ Es gibt $u_1 \in U_1 \cap U_3$, $u_2 \in U_2 \cap U_3$ mit $u = u_1 + u_2$.
  $\Rightarrow u = \underbrace{u_1}_{\in U_3} + \underbrace{u_2}_{\in U_3} \overset{U_3 \text{ UVR}}{\in} U_3$
  Außerdem $u = \underbrace{u_1}_{\in U_1} + \underbrace{u_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$.
  $\Rightarrow u \in (U_1 + U_2) \cap U_3$.

Dimensionsformel (beachte $U_1 + U_2 + U_3 = (U_1 + U_2) + U_3$) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\dim_K(U_1 + U_2 + U_3) \\ = \quad &\dim_K(U_1 + U_2) + \dim_K(U_3) - \dim_K(\underbrace{(U_1 + U_2) \cap U_3}_{=(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)}) \\ \overset{\text{Dim-Formel (2mal)}}{=} \quad &\big[\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 \cap U_2)\big] + \dim_K(U_3) \\ &\quad - \big[\dim_K(U_1 \cap U_3) + \dim_K(U_2 \cap U_3) - \dim_K(\underbrace{(U_1 \cap U_2) \cap (U_2 \cap U_3)}_{= U_1 \cap U_2 \cap U_3})\big]. \end{aligned}$$

Das liefert die geforderte Gleichung.

Alternative Lösung: Man kommt auch ohne den Hinweis aus, indem man stattdessen folgende Überlegungen trifft:
Gilt $U_1 \subset U_3$, so ist $U_1 + U_2 + U_3 = U_2 + U_3$ (*) und $U_1 \cap U_3 = U_1$, $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U_2 \cap U_3$ (**).

(Die Aussage (*) bedarf eigentlich noch eines Beweises).
Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\dim_K(U_1+U_2+U_3) &\overset{(*)}{=} \dim_K(U_2+U_3) = \dim_K(U_2) + \dim_K(U_3) - \dim_K(U_2\cap U_3) \\
&= \dim_K(U_2) + \dim_K(U_3) - \dim_K(U_2 \cap U_3) \\
&\qquad + \underbrace{\left[\dim_K(U_1) - \dim_K(U_1\cap U_3)\right]}_{\overset{(**)}{=}0} \\
&\qquad + \underbrace{\left[\dim_K(U_1\cap U_2\cap U_3) - \dim_K(U_1\cap U_2)\right]}_{\overset{(**)}{=}0}.
\end{aligned}$$

Dies liefert die geforderte Gleichung.

(c) (i) Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$\dim_K(U_1\cap U_2) = \underbrace{\dim_K(U_1)+\dim_K(U_2)}_{>n \text{ (Vorauss.)}} - \underbrace{\dim_K(U_1+U_2)}_{\overset{U_1+U_2\subset V \text{ UVR}}{\leq} \dim_K(V)=n} > n-n = 0.$$

Daher $\dim_K(U_1\cap U_2) > 0 \Rightarrow U_1\cap U_2 \neq \{0\}$.

(ii) Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\dim_K(U_1\cap U_2) &= \dim_K(U_1)+\dim_K(U_2) - \underbrace{\dim_K(U_1+U_2)}_{\overset{U_1+U_2\subset V \text{ UVR}}{\leq} \dim_K(V)=n} \\
&\geq (n-1)+(n-1)-n = n-2 \quad (*)
\end{aligned}$$

Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\dim_K(U_1\cap U_2\cap U_3) &= \dim_K(U_1\cap U_2)+\dim_K(U_3) - \underbrace{\dim_K((U_1\cap U_2)+U_3)}_{\overset{(U_1\cap U_2)+U_3\subset V \text{ UVR}}{\leq} \dim_K(V)=n} \\
&\overset{(*)}{\geq} (n-2)+(n-1)-n = n-3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 30 (Dimensionen und direkte Summen von Untervektorräumen, 4 = 2.5 + 0.5 + 1 Punkte).

Gegeben seien die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{Q}$ -Vektorraums $\mathbb{Q}^4$:

$$U_1 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\1\end{pmatrix}\right) \text{ und } U_2 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

(a) Ermitteln Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U_1, U_2 und U_1+U_2.

(b) Ermitteln Sie die Dimension von $U_1\cap U_2$.

(c) Geben Sie einen Untervektorraum $W\subset\mathbb{Q}^4$ an, so dass $\mathbb{Q}^4 = U_1\oplus W$ (und begründen Sie Ihre Wahl).

Lösung:

(a) (i) Basis und Dimension für U_1: Die gegebenen Vektoren werden als Zeilen einer Matrix aufgefasst und per Gauß-Algorithmus über elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform gebracht.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{-Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

Vorlesung $\implies U_1 = ZR(A) = ZR(B)$ und die Nicht-Nullzeilen von B bilden eine Basis von $ZR(B) = U_1$
$\Rightarrow$

$$B_1 := (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

ist eine Basis von U_1.
$\implies \dim_{\mathbb{Q}}(U_1) = 2$

(ii) Basis und Dimension für U_2: Die gegebenen Vektoren werden als Zeilen einer Matrix aufgefasst und per Gauß-Algorithmus über elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform gebracht.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier ist A bereits in Zeilenstufenform.
Vorlesung $\implies U_2 = ZR(A)$ und die Nicht-Nullzeilen von A bilden eine Basis
$\Rightarrow$

$$B_2 := (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

ist eine Basis von U_2.
$\implies \dim_{\mathbb{Q}}(U_2) = 3$

(iii) Basis und Dimension von $U_1 + U_2$:
(a),(b) und P30(a) $\Rightarrow$

$$U_1 + U_2 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Die gegebenen Vektoren werden als Zeilen einer Matrix aufgefasst und per Gauß-

Algorithmus über elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform gebracht.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 7 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{(-3)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\overset{-Z2+Z3\to Z3,(-3/2)Z2+Z4\to Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\overset{Z3\leftrightarrow Z4,Z4\leftrightarrow Z5}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vorlesung $\implies U_1+U_2 = ZR(A) = ZR(B)$ und die Nicht-Nullzeilen von B bilden eine Basis von $ZR(B) = U_1 + U_2$

$\Rightarrow$

$$B_3 := (\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{7}{2}\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$$

ist eine Basis von $U_1 + U_2$.

$\implies \dim_{\mathbb{Q}}(U_1 + U_2) = 4$

(b) Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$\dim_K(U_1 \cap U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 + U_2) = 2 + 3 - 4 = 1.$$

(c) *Ansatz (nicht Teil der Lösung): Betrachte die Matrix B in Zeilenstufenform für U_1 (vgl. (a)(i)), bei welcher die Nullzeilen gelöscht sind:*

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Wir wählen die zwei Einheitsvektoren aus, welche in B eingefügt die Zeilenstufenform beibehalten. Hier ist das e_3, e_4.

Sei $W = \operatorname{Lin}(e_3, e_4)$.

In (a) wurde gesehen, dass $U_1 = \operatorname{Lin}((b_1, b_2))$ mit $b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

P30(a) $\Rightarrow$

$$U_1 + W = \operatorname{Lin}((b_1, b_2, e_3, e_4))$$

Schreiben wir die Vektoren zeilenweise in eine Matrix, so sehen wir, dass diese in Zeilenstufenform ist $\Rightarrow (b_1, b_2, e_3, e_4)$ sind linear unabhängig

$\overset{\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4)=4}{\Rightarrow} (b_1, b_2, e_3, e_4)$ ist Basis von $\mathbb{Q}^4$

$$\Rightarrow \quad U_1 + W = \operatorname{Lin}((b_1, b_2, e_3, e_4)) = \mathbb{Q}^4.$$

e_3, e_4 linear unabhängig $\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}(W) = 2$.

$\overset{(a)}{\Rightarrow} \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4) = 4 = 2 + 2 = \dim_{\mathbb{Q}}(U_1) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$

$\overset{\mathbb{Q}^4 = U_1 + W,\text{ VL 8.5}}{\Rightarrow} \mathbb{Q}^4 = U_1 \oplus W$.

Aufgabe 31 (Definition linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Gegeben folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann ist (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Sei ferner f die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2, f(v_3) = w_3$ (vgl. P31(a)).

(a) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}(v_1 - v_2) + v_3$ und $v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 - v_3$. Bestimmen Sie $f(v)$ und $f(v')$.

(b) Finden Sie $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so dass $f = \tilde{A}$.
Hinweis: Laut Vorlesung muss dafür gelten: $f(x) = A \cdot x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^3$.

(c) Kann es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geben mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) &= f(-\frac{1}{4}(v_1 - v_2) + v_3) \overset{f\text{ linear}}{=} -\frac{1}{4}f(v_1) + \frac{1}{4}f(v_2) + f(v_3) \\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} \\ f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= f(v_1) - f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Vorlesung $\Rightarrow$ Die i-te Spalte der Matrix A ist das Bild $f(e_i)$ des i-ten Einheitsvektors e_i unter f, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$f(e_1)$ und $f(e_2)$ sind aus (a) bekannt; berechne also noch $f(e_3)$.
Gesucht sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $e_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

Löse LGS für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (Z1 = Zeile 1, Z2 = Zeile 2, Z3 = Zeile 3):

$$\begin{aligned} & & e_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \\ &\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(-1)Z1+Z2\to Z2,(-1)Z1+Z3\to Z3}{\iff} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z3 $\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{4}$
Z2 $\Rightarrow \lambda_3 = 0 \overset{Z1}{\Rightarrow} \lambda_1 = \frac{1}{4}$.

Wir erhalten also: $e_3 = \frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{4}v_2$

$$\Rightarrow f(e_3) = \tfrac{1}{4}f(v_1) - \tfrac{1}{4}f(v_2) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Diese lineare Abbildung existiert *nicht*. Wir stellen zunächst fest, dass

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(*Der systematische Ansatz zur Bestimmung von $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ wäre hier das Lösen des folgenden LGS gewesen:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Durch die drei gegebenen Bedingungen sollte φ eindeutig festgelegt sein, wenn die drei gegebenen Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Dies ist hier nicht der Fall, weswegen Eigenschaften wie Linearität oder Eindeutigkeit verletzt werden können (vgl. P31(a)).)

Angenommen φ wäre eine lineare Abbildung, dann müsste Folgendes gelten:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Def. }\varphi}{=} \varphi(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) \overset{\varphi\text{ lin.}}{=} 2\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) + \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}) = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Widerspruch!

Aufgabe 32 (Beispiele und Gegenbeispiele für lineare Abbildungen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Entscheiden Sie jeweils, ob die Abbildungen f_i zwischen den gegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen linear sind oder nicht (geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel).

(a) (i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$

(ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, 2x_2, x_1 + x_2)$

(iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, 2x_2, 0)$

(b) $f_4 : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), A \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot A$ mit festem $\alpha \in (0, 2\pi]$

(c) Verschiebungsabbildung: $f_5 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung:

(a) (i) f_1 ist nicht linear, denn: Wähle $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$, $x = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\begin{aligned} f_1(\lambda \cdot x) &= f_1((6, 8)) = 6 \cdot 8 = 48, \\ \text{aber} \quad \lambda \cdot f_1(x) &= 2 \cdot f_1((3, 4)) = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24. \end{aligned}$$

(ii) f_2 ist nicht linear, denn: Wähle $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$, $x = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\begin{aligned} f_2(\lambda \cdot x) &= f_2((6, 8)) = (7, 16, 14), \\ \text{aber} \quad \lambda \cdot f_2(x) &= 2 \cdot f_2((3, 4)) = 2 \cdot (4, 8, 7) = (8, 16, 14). \end{aligned}$$

(iii) f_3 ist linear, denn: Seien $x = (x_1, x_2, x_3), x' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_3(x + x') &= f_3((x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3)) = ((x_3 + x'_3), 2(x_2 + x'_2), 0) \\ &= (x_3, 2x_2, 0) + (x'_3, 2x'_2, 0) = f_3(x) + f_3(x'), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_3(\lambda \cdot x) &= f_3((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)) = (\lambda x_3, 2(\lambda x_2), 0) \\ &= (\lambda x_3, \lambda(2x_2), 0) = \lambda \cdot (x_3, 2x_2, 0) = \lambda \cdot f_3(x). \end{aligned}$$

(b) f_4 ist linear, denn: Sei $S := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.
Seien $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f_4(A + B) = S \cdot (A + B) = S \cdot A + S \cdot B = f_4(A) + f_4(B),$$

und

$$f_4(\lambda A) = S \cdot (\lambda A) = \lambda S A = \lambda f_4(A).$$

(c) f_5 ist linear, denn: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_5((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\overset{\text{Def. Add.}}{=} f_5((a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{\text{Def. } f_5}{=} (a_{n+1} + b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \\ &\overset{\text{Def. Add.}}{=} (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + (b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{Def. } f_5}{=} f_5((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) + f_5((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_5(\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\overset{\text{Def. skal. Mult.}}{=} f_5((\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{\text{Def. } f_5}{=} (\lambda \cdot a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \\ &\overset{\text{Def. skal. Mult.}}{=} \lambda \cdot (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{Def. } f_5}{=} \lambda \cdot f_5((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **13. Dezember 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`