Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

8. Abgabeblatt

Aufgabe 29	Aufgabe 30	Aufgabe 31	Aufgabe 32	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 29 (Nachweise mit der Dimensionsformel, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Seien $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ Untervektorräume eines endlich–dimensionalen K–Vektorraumes V über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass die folgende Formel (*) im Allgemeinen falsch ist:

$$\begin{aligned}\dim_K(U_1+U_2+U_3) = {} & \dim_K(U_1)+\dim_K(U_2)+\dim_K(U_3)+\dim_K(U_1\cap U_2\cap U_3)\\ & -\dim_K(U_1\cap U_2)-\dim_K(U_1\cap U_3)-\dim_K(U_2\cap U_3)\end{aligned}$$

Hinweis: Nutzen Sie $V=\mathbb{R}^2$ und drei (explizit anzugebende) UVR der Dimension 1.

(b) Zeigen Sie, dass unter der Annahme $U_1 \subseteq U_3$ die Formel (*) gilt.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass unter der Voraussetzung gilt: $(U_1+U_2)\cap U_3 = (U_1\cap U_3)+(U_2\cap U_3)$. Wenn Sie dies beweisen, erhalten Sie einen Bonuspunkt.

(c) Sei nun $n \geq 3$ und $\dim_K V = n$. Nutzen Sie die Dimensionsformel für Untervektorräume (und keine Basen), um folgende Aussagen zu zeigen:

(i) Gilt $\dim_K(U_1)+\dim_K(U_2) > n$, so folgt $U_1\cap U_2 \neq \{0\}$.

(ii) Gilt $\dim_K(U_1)=\dim_K(U_2)=\dim_K(U_3)=n-1$, so ist $\dim_K(U_1\cap U_2\cap U_3)\geq n-3$.

Aufgabe 30 (Dimensionen und direkte Summen von Untervektorräumen, 4 = 2.5 + 0.5 + 1 Punkte).
Gegeben seien die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{Q}$ -Vektorraums $\mathbb{Q}^4$:

$$U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\1\end{pmatrix}\right) \text{ und } U_2 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

(a) Ermitteln Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U_1, U_2 und U_1+U_2.

(b) Ermitteln Sie die Dimension von $U_1 \cap U_2$.

(c) Geben Sie einen Untervektorraum $W \subset \mathbb{Q}^4$ an, so dass $\mathbb{Q}^4 = U_1 \oplus W$ (und begründen Sie Ihre Wahl).

Aufgabe 31 (Definition linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Gegeben folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}3\\-4\\7\end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

Dann ist (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Sei ferner f die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2, f(v_3) = w_3$ (vgl. P31(a)).

(a) Sei $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{4}(v_1 - v_2) + v_3$ und $v' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = v_1 - v_3$. Bestimmen Sie $f(v)$ und $f(v')$.

(b) Finden Sie $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so dass $f = \tilde{A}$.
Hinweis: Laut Vorlesung muss dafür gelten: $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(c) Kann es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geben mit

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \quad ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 32 (Beispiele und Gegenbeispiele für lineare Abbildungen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Entscheiden Sie jeweils, ob die Abbildungen f_i zwischen den gegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen linear sind oder nicht (geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel).

(a) (i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$
(ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, 2x_2, x_1 + x_2)$
(iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, 2x_2, 0)$

(b) $f_4 : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), A \mapsto \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \cdot A$ mit festem $\alpha \in (0, 2\pi]$

(c) Verschiebungsabbildung: $f_5 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **13. Dezember 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`