UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

**Lineare Algebra 1**
**Prof. Dr. R. Dahlhaus**
**Dr. S. Richter, N. Phandoidaen**
**Wintersemester 2018/2019**

# 7. Abgabeblatt – Lösungen

| Aufgabe 25 | Aufgabe 26 | Aufgabe 27 | Aufgabe 28 | Summe: |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

**Aufgabe 25 (Dimension von Matrizenräumen, 4 = 1 + 1 + 1.5 + 0.5 Punkte).**
Es sei $K$ ein Körper mit $2 := 1+1 \neq 0$ und $V = M(n \times n, K)$ der Vektorraum der $n \times n$–Matrizen über $K$. Wir definieren die Mengen

$$U := \{A = (a_{ij}) \in V \mid A^t = A\} \quad \text{und} \quad W := \{A = (a_{ij}) \in V \mid A^t = -A\}$$

der symmetrischen und schiefsymmetrischen $n \times n$–Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass $U$ ein Untervektorraum von $V$ ist.
*Bemerkung: Auch $W$ ist ein Untervektorraum von $V$; der Beweis ist analog dem von $U$.*

(b) Zeigen Sie, dass $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.
*Hinweis: Gegeben eine Matrix $M \in V$, welche Eigenschaft hat $S := \frac{1}{2}(M + M^t)$?*

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U$ und geben Sie $\dim_K(U)$ an.

(d) Berechnen Sie $\dim_K(W)$ mittels Aufgabe P23(c).

**Lösung:**
Es bezeichne 0 die Nullmatrix.

(a) ▲ Zeige: $U$ ist UVR. Seien $A, B \in U$, $\lambda \in K$.

- $U \neq \emptyset$, denn: $0^t = 0 \Rightarrow 0 \in U$.
- $(A+B)^t = A^t + B^t \overset{A,B\in U}{=} A + B \Rightarrow A + B \in U$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t \overset{A\in U}{=} \lambda A \Rightarrow A + B \in U$

▲ Zeige (nicht verlangt!): $W$ ist UVR. Seien $A, B \in W$, $\lambda \in K$.

- $W \neq \emptyset$, denn: $0^t = 0 \Rightarrow 0 \in W$.
- $(A+B)^t = A^t + B^t \overset{A,B\in W}{=} -A + (-B) = -(A+B) \Rightarrow A + B \in W$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t \overset{A\in W}{=} \lambda(-A) = -\lambda A \Rightarrow \lambda A \in W$

(b)

- $V = U + W$, denn („$\supset$“ ist klar, zeige „$\subset$“):
  Sei $M \in M(n \times n, K)$ beliebig.
  Wähle $S = \frac{1}{2}(M + M^t)$ und $A = \frac{1}{2}(M - M^t)$.
  Dann gilt:
  - $S + A = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^t + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^t = M$.
  - $S^t = (\frac{1}{2}(M + M^t))^t = \frac{1}{2}(M + M^t)^t = \frac{1}{2}(M^t + (M^t)^t) = \frac{1}{2}(M^t + M) = S$, d.h. $S \in U$.
  - $A^t = (\frac{1}{2}(M - M^t))^t = \frac{1}{2}(M - M^t)^t = \frac{1}{2}(M^t - (M^t)^t) = \frac{1}{2}(M^t - M) = -\frac{1}{2}(M - M^t) = -A$, d.h. $A \in W$.
- $U \cap W = \{0\}$, denn („$\supset$“ ist klar, zeige „$\subset$“):
  Sei $A \in U \cap W$.
  $\overset{A \in U \cap W}{\Rightarrow} -A^t = A = A^t$
  $\Rightarrow 2A^t = 0$
  $\overset{2 \neq 0}{\Rightarrow} A^t = 0$
  $\overset{(...)^t}{\Rightarrow} A = (A^t)^t = 0^t = 0.$

(c)

- Bestimme eine Basis für $U$:
  *Ansatz zum Finden einer Basis. (Muss nicht Bestandteil der Lösung sein.)*

  *Sei $A = (a_{ij}) \in U \overset{A \in U}{\Rightarrow} a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$. An die Diagonalelemente $a_{ii}$, $i \in \{1, ..., n\}$ werden keine Bedingungen gestellt; diese sind daher beliebig.*

  *$\Rightarrow$ Zur Beschreibung einer Matrix $A \in U$ reicht die Angabe von $a_{ij}$, $i \leq j$, und es muss stets $a_{ji} = a_{ij}$ gelten.*

  Behauptung: $((E_{ij} + E_{ji}), 1 \leq i \leq j \leq n)$ ist eine Basis von $U$.
  - Erzeugendensystem: Sei $A = (a_{ij}) \in U$.
    *Ziel: Finde $\lambda_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq j \leq n$, sodass $A = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$.*
    Wähle
    $$\lambda_{ij} := \begin{cases} a_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{-1}a_{ii}, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$
    Dann ist für $k, l \in \{1, ..., n\}$, $k < l$:
    $$\begin{aligned} \Big(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij}(E_{ij} + E_{ji})\Big)_{kl} &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \cdot \Big( \underbrace{(E_{ij})_{kl}}_{= \begin{cases} 1, & i = k \text{ und } j = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} + \underbrace{(E_{ji})_{kl}}_{=0} \Big) \\ &= \lambda_{kl} = a_{kl}, \end{aligned}$$
    (analog $k > l$), und
    $$\begin{aligned} \Big(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij}(E_{ij} + E_{ji})\Big)_{kk} &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \cdot \Big( \underbrace{(E_{ij})_{kl}}_{= \begin{cases} 1, & i = k = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} + \underbrace{(E_{ji})_{kl}}_{= \begin{cases} 1, & i = k = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} \Big) \\ &= \lambda_{kk} \cdot (1 + 1) = a_{kk}, \end{aligned}$$
    d.h. wir haben gesehen: $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) = A$.
  - Lineare Unabhängigkeit: Seien $\lambda_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq j \leq n$. Es gelte
    $$0 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij}(E_{ij} + E_{ji}).$$

Sei $1 \leq k \leq l \leq n$ beliebig. Es folgt

$$0 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \Big( \underbrace{(E_{ij})_{kl}}_{=\begin{cases} 1, & i = k \text{ und } j = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} + \underbrace{(E_{ji})_{kl}}_{=\begin{cases} 1, & j = k \text{ und } i = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} \Big) = \lambda_{kl}$$

d.h. $\lambda_{kl} = 0$ für alle $1 \leq k \leq l \leq n$.

- Bestimme Dimension von $U$: Anzahl der Elemente von Basis $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ ist

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{j} 1}_{=j} = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\Rightarrow \dim_K(U) = \frac{n(n+1)}{2}$

(d) In Teilaufgabe (b) haben wir die Voraussetzungen von P23(c) überprüft. Daher kann die Aussage verwendet werden. Dann gilt

$$\dim_K(W) = \dim(V) - \dim_K(U) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Aufgabe 26 (Basisbestimmung mittels Zeilenstufenform, 4 = 2 + 2 Punkte).**

Sei $K$ ein Körper. Wie in Aufgabe 21 wollen wir die folgenden Vektoren als Elemente des $K^6$ auffassen, indem die ganzen Zahlen angeben, wie häufig 1 aufsummiert wird:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$
$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir definieren $U := \text{Lin}(\{v_1, ..., v_4\})$.
Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $U$ und die Dimension $\dim_K(U)$ für

(a) $K = \mathbb{Q}$,

(b) $K = F_5$,

indem Sie die Vektoren in eine Matrix schreiben und mittels des Gauß-Algorithmus bzw. elementarer Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform bringen.

**Lösung:**

Wir nutzen den Gauß-Algorithmus: Schreibe Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4$ zeilenweise in eine Matrix $A$,

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Fall $K = \mathbb{Q}$: Wir wenden elementare Zeilenumformungen wie folgt an:

$$
\begin{aligned}
A \quad &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{1\leftrightarrow 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{(-\frac{3}{2})\cdot Z1+Z4\to Z4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{(-1)\cdot Z2+Z3\to Z3,(-\frac{5}{2})\cdot Z2+Z4\to Z4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -15 & -20 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z3\leftrightarrow Z4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =: B =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrix $B$ ist in Zeilenstufenform (ZSF).
Offensichtlich sind alle 4 Zeilen $b_1, b_2, b_3, b_4$ nicht Null. Es folgt

$$U = \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_4\}) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{ZR}(A) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=} \mathrm{ZR}(B) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Lin}(\{b_1, b_2, b_3, b_4\}),$$

und $(b_1, ..., b_4)$ ist Basis von $U \Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}(U) = 4$.

(b) Fall $K = F_5$: Wir wenden elementare Zeilenumformungen wie folgt an:

$$
\begin{aligned}
A \quad &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{1\leftrightarrow 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z1+Z4\to Z4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{(-1)\cdot Z2+Z3\to Z3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrix $B$ ist in Zeilenstufenform (ZSF).
Offensichtlich sind nur die ersten drei Zeilen $b_1, b_2, b_3$ nicht Null. Es folgt

$$U = \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_4\}) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{ZR}(A) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=} \mathrm{ZR}(B) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Lin}(\{b_1, b_2, b_3\}),$$

und $(b_1, b_2, b_3)$ ist Basis von $U \Rightarrow \dim_{F_5}(U) = 3$.

**Aufgabe 27 (Zeilenrang und inverse Matrizen, 4 = 2 + 2 Punkte).**

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{Q}$ den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & \alpha-1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ \alpha & -3 & 3\alpha & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R} \backslash \{1, 1-n\}$. Seien Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} x, & j = i, \\ 1, & j \neq i, \end{cases} \qquad b_{ij} := \frac{1}{(x-1)\cdot(x+n-1)} \cdot \begin{cases} x + (n-2), & j = i, \\ -1, & j \neq i. \end{cases}$$

(i) Geben Sie die Matrizen $A, B$ für $n = 4$ an (d.h. schreiben Sie diese als $4 \times 4$–Schema).

(ii) Zeigen Sie, dass $B = A^{-1}$.
*Hinweis: Rechnen Sie nur eine Multiplikation nach, zum Beispiel $A \cdot B = E_n$.*

**Lösung:** (a) Wir bestimmen den Zeilenrang durch der gegeben Matrix (nenne Sie $A$) durch Überführung in Zeilenstufenform mittels elementarer Zeilenumformungen:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -4 & \alpha-1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ \alpha & -3 & 3\alpha & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z1 \leftrightarrow Z2, Z2 \leftrightarrow Z3, Z3 \leftrightarrow Z4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & \alpha-1 & 1 \\ \alpha & -3 & 3\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)Z1+Z2 \to Z2, (-5)Z1+Z3 \to Z3, (-\alpha)Z1+Z4 \to Z4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & \alpha-11 & 6 \\ 0 & -3 & \alpha & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)Z2+Z3 \to Z3, (-3/2)Z2+Z4 \to Z4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2}+\alpha & -\frac{5}{2}+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2 \cdot Z4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 15+2\alpha & -5+2\alpha \end{pmatrix}$$

- Fall $\alpha = 1$: Dann ist

$$B \overset{Z3 \leftrightarrow Z4}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B'$$

d.h. $B'$ besitzt eine Nullzeile bzw. drei Nicht-Nullzeilen.

$$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{ZR}(A)) \overset{\text{elemt. Zeilenumf.}}{=} \dim_{\mathbb{Q}}(\text{ZR}(B')) = 3$$

- Fall $\alpha = \frac{5}{2}$: Dann ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-\frac{40}{3})Z3+Z4\to Z4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B',$$

d.h. $B'$ besitzt eine Nullzeile bzw. drei Nicht-Nullzeilen.

$$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{ZR}(A)) \overset{\text{elemt. Zeilenumf.}}{=} \dim_{\mathbb{Q}}(\text{ZR}(B')) = 3$$

- Falls $\alpha \notin \{1, \frac{5}{2}\}$

$$B \overset{(-\frac{15+2\alpha}{\alpha-1})Z4+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5+2\alpha \end{pmatrix} =: B',$$

d.h. $B'$ ist in ZSF und besitzt keine Nullzeile bzw. vier Nicht-Nullzeilen.

$$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{ZR}(A)) \overset{\text{elemt. Zeilenumf.}}{=} \dim_{\mathbb{Q}}(\text{ZR}(B')) = 4$$

(b) (i) Für $n = 4$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{(x-1)\cdot(x+3)} \begin{pmatrix} x+2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x+2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & x+2 \end{pmatrix}$$

(ii) Zu zeigen ist $A \cdot B = E_n$ und $B \cdot A = E_n$.
Wir zeigen nur $A \cdot B = E_n$, die andere Multiplikation geht analog.
Seien $i, k \in \{1, ..., n\}$.

- Diagonalelemente: *Erster Schritt jeweils: Teile die Summe in der Definition der Matrizenmultiplikation gemäß der Fallunterscheidung in der Definition von A, B so auf, dass die Elemente von A, B explizit hingeschrieben werden können.* Es gilt

$$\begin{aligned}
(A\cdot B)_{ii} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = a_{ii}b_{ii} + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} a_{ij}b_{ji} \\
&= x \cdot \frac{x+(n-2)}{(x-1)\cdot(x+n-1)} + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} 1 \cdot \frac{(-1)}{(x-1)\cdot(x+n-1)} \\
&= \frac{1}{(x-1)\cdot(x+n-1)} \cdot \Big[x\cdot(x+n-2) + \underbrace{\sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}}_{n-1 \text{ Summanden}} (-1)\Big] \\
&= \frac{1}{(x-1)\cdot(x+n-1)} \cdot \Big[x\cdot(x+n-2) - (n-1)\Big] \\
&= \frac{x^2+(n-2)x-(n-1)}{x^2+(n-2)x-(n-1)} = 1 = (E_n)_{ii}.
\end{aligned}$$

- Nicht-Diagonalelemente: Seien $i \neq k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(A \cdot B)_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{ii} b_{ik} + a_{ik} b_{ii} + \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i,k\}} a_{ij} b_{jk} \\
&= x \cdot \frac{(-1)}{(x-1)(x+n-1)} + 1 \cdot \frac{(x+n-2)}{(x-1)(x+n-1)} \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i,k\}}}_{(n-2) \text{ Summanden}} 1 \cdot \frac{(-1)}{(x-1)(x+n-1)} \\
&= \frac{1}{(x-1)(x+n-1)} \Big[ x \cdot (-1) + 1 \cdot (x+n-2) + (n-2) \cdot 1 \cdot (-1) \Big] \\
&= \frac{1}{(x-1)(x+n-1)} \cdot 0 = 0 = (E_n)_{ik}.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $(A \cdot B)_{ik} = (E_n)_{ik}$ für alle $i, k \in \{1, ..., n\}$, d.h. $A \cdot B = E_n$.

**Aufgabe 28 (Zeilenrang und Invertierbarkeit, 4 = 1.5 + 2.5 Punkte).**
Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ Matrizen über einem Körper $K$. Zeigen Sie:

(a) Zeilenrang$(AB) \leq$ Zeilenrang$(A)$.

(b) (i) Es gilt

$$\text{Zeilenrang}(A) < n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists v \in K^n \setminus \{0\} \text{ mit } v \cdot A = 0.$$

*Anmerkung: $v \in K^n \setminus \{0\}$ soll hier als Zeilenvektor aufgefasst werden.*

(ii) Falls $A$ invertierbar ist, so gilt Zeilenrang$(A) = n$.

**Lösung:**

(a) Sei $r =$ Zeilenrang$(A)$.
Umformen auf Zeilenstufenform mittels Elementarmatrizen $\Rightarrow$ Es gibt $S \in M(n \times n, K)$ (Produkt von Elementarmatrizen) und $r \in \{0, ..., n\}$ mit

$$S \cdot A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist in Zeilenstufenform (d.h. Zeilen $c_1, ..., c_r$ sind keine Nullzeilen).
$\Rightarrow$ Zeilenrang$(A) =$ Zeilenrang$(S \cdot A) = r$.
Es gilt

$$S \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def. Matrixmult.}}{=} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die rechte Seite weiterhin $n - r$ Nullzeilen besitzt.
$\Rightarrow$ Zeilenrang$(A \cdot B) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=}$ Zeilenrang$(S \cdot A \cdot B) \leq r =$ Zeilenrang$(A)$.

(b) (i) Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$.

- „$\Rightarrow$“: Es gelte $\dim_K \mathrm{ZR}(A) = \text{Zeilenrang}(A) < n$
$\overset{\mathrm{ZR}(A)=\mathrm{Lin}(\{a_1,...,a_n\})}{\Rightarrow} (a_1, ..., a_n)$ ist Erzeugendensystem von $\mathrm{ZR}(A)$, aber keine Basis (sonst hätte es Länge $< n$).
$\Rightarrow (a_1, ..., a_n)$ ist linear abhängig
$\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ mit $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$
Wähle $v := (\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0$.
$\Rightarrow v \cdot A = (\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n) = 0$.
- „$\Leftarrow$“: Es gebe $v = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n \backslash \{0\}$ mit $v \cdot A = 0$.
$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$
$\Rightarrow (a_1, ..., a_n)$ linear abhängig
$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \dim_K \mathrm{ZR}(A) = \dim_K \mathrm{Lin}(\{a_1, ..., a_n\}) < n$ (wäre es $= n$, wäre $(a_1, ..., a_n)$ Basis und damit linear unabhängig).

*Alternative Lösungsmöglichkeit (Unter Nutzung von Zeilenstufenform, Elementarmatrizen und deren Invertierbarkeit):* Durch elementare Zeilenumformungen gibt es eine Matrix $S \in M(n \times n, K)$ (Produkt von Elementarmatrizen), so dass $S \cdot A = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_r \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ Zeilenstufenform besitzt.

Elementarmatrizen sind invertierbar $\Rightarrow S$ ist invertierbar (als Produkt von invertierbaren Matrizen).

- „$\Rightarrow$“: Wähle $\tilde{v} := (0, ..., 0, 1) \in K^n \backslash \{0\}$ und $v := \tilde{v} \cdot S$
(es gilt $v \neq 0$, sonst wäre $0 = v \cdot S^{-1} = \tilde{v} \cdot S \cdot S^{-1} = \tilde{v} \cdot E_n = \tilde{v}$, Widerspruch).
$$\Rightarrow v \cdot A = \tilde{v} \cdot S \cdot A = \tilde{v} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_r \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Zeilenrang}(A)<n \Rightarrow r<n}{=} 0$$
- „$\Leftarrow$“: (per indirektem Beweis): Sei $r = \text{Zeilenrang}(A) = n$.
Sei $v \in K^n$ mit $v \cdot A = 0$. Wir zeigen: $v = 0$.
$\text{Zeilenrang}(A) = n \Rightarrow$ Für die Zeilenstufenform gilt
$$S \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & * & * & * \\ 0 & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$
mit $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1, ..., n)$.
Sei $\tilde{v} := v \cdot S^{-1}$
$\Rightarrow \tilde{v} \cdot (S \cdot A) = v \cdot S^{-1} \cdot S \cdot A = v \cdot A = 0$.

Schreibe $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_n)$. Dann ist

$$0 = \tilde{v} \cdot (S \cdot A) = (\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_n) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & * & * & * \\ 0 & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \cdot b_{11} \\ \tilde{v}_1 \cdot * + \tilde{v}_2 \cdot b_{22} \\ \dots \\ \tilde{v}_1 \cdot * + ... + \tilde{v}_{n-1} \cdot * + \tilde{v}_n \cdot b_{nn} \end{pmatrix}^t$$

Aus obiger Gleichheit folgt:
1. Zeile $\Rightarrow 0 = \tilde{v}_1$
2. Zeile $\Rightarrow 0 = \tilde{v}_2$
...
$n$. Zeile $\Rightarrow 0 = \tilde{v}_n$,
d.h. $\tilde{v} = 0$
$\Rightarrow v = S \cdot \tilde{v} = 0$.

(ii) Sei $A$ invertierbar.
Wir zeigen die Negation der rechten Seite von (i). Dann folgt mit (i): Zeilenrang$(A) = n$.
Sei $v \in K^n \backslash \{0\}$ beliebig mit $v \cdot A = 0$.
$A$ invertierbar $\Rightarrow$ Es gibt $B \in M(n \times n, K)$ mit $A \cdot B = E_n$.
$\Rightarrow v = v \cdot E_n = v \cdot A \cdot B = 0 \cdot B = 0$, Widerspruch!
Also gibt es kein $v \in K^n \backslash \{0\}$ mit $v \cdot A = 0$.

---

**Abgabe:**
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **06. Dezember 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

**Homepage der Vorlesung:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`