7. Abgabeblatt

Aufgabe 25	Aufgabe 26	Aufgabe 27	Aufgabe 28	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 25 (Dimension von Matrizenräumen, 4 = 1 + 1 + 1.5 + 0.5 Punkte).
Es sei K ein Körper mit $2 := 1 + 1 \neq 0$ und $V = M(n \times n, K)$ der Vektorraum der $n \times n$–Matrizen über K. Wir definieren die Mengen

$$U := \{A = (a_{ij}) \in V \mid A^t = A\} \quad \text{und} \quad W := \{A = (a_{ij}) \in V \mid A^t = -A\}$$

der symmetrischen und schiefsymmetrischen $n \times n$–Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.
Bemerkung: Auch W ist ein Untervektorraum von V; der Beweis ist analog dem von U.

(b) Zeigen Sie, dass $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.
Hinweis: Gegeben eine Matrix $M \in V$, welche Eigenschaft hat $S := \frac{1}{2}(M + M^t)$?

(c) Bestimmen Sie eine Basis von U und geben Sie $\dim_K(U)$ an.

(d) Berechnen Sie $\dim_K(W)$ mittels Aufgabe P23(c).

Aufgabe 26 (Basisbestimmung mittels Zeilenstufenform, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei K ein Körper. Wie in Aufgabe 21 wollen wir die folgenden Vektoren als Elemente des K^6 auffassen, indem die ganzen Zahlen angeben, wie häufig 1 aufsummiert wird:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$
$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir definieren $U := \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_4\})$.
Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U und die Dimension $\dim_K(U)$ für

(a) $K = \mathbb{Q}$,

(b) $K = F_5$,

indem Sie die Vektoren in eine Matrix schreiben und mittels des Gauß-Algorithmus bzw. elementarer Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform bringen.

Aufgabe 27 (Zeilenrang und inverse Matrizen, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{Q}$ den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & \alpha-1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ \alpha & -3 & 3\alpha & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4\times 4, \mathbb{Q})$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}\backslash\{1, 1-n\}$. Seien Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n\times n, \mathbb{R})$ definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} x, & j = i, \\ 1, & j \neq i, \end{cases} \qquad b_{ij} := \frac{1}{(x-1)\cdot(x+n-1)} \cdot \begin{cases} x+(n-2), & j = i, \\ -1, & j \neq i. \end{cases}$$

(i) Geben Sie die Matrizen A, B für $n = 4$ an (d.h. schreiben Sie diese als 4×4–Schema).

(ii) Zeigen Sie, dass $B = A^{-1}$.
Hinweis: Rechnen Sie nur eine Multiplikation nach, zum Beispiel $A \cdot B = E_n$.

Aufgabe 28 (Zeilenrang und Invertierbarkeit, 4 = 1.5 + 2.5 Punkte).
Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie:

(a) Zeilenrang$(AB) \leq$ Zeilenrang(A).

(b) (i) Es gilt

$$\text{Zeilenrang}(A) < n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists v \in K^n\backslash\{0\} \text{ mit } v \cdot A = 0.$$

Anmerkung: $v \in K^n\backslash\{0\}$ soll hier als Zeilenvektor aufgefasst werden.

(ii) Falls A invertierbar ist, so gilt Zeilenrang$(A) = n$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **06. Dezember 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`