Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

6. Abgabeblatt - Lösungen

Aufgabe 21	Aufgabe 22	Aufgabe 23	Aufgabe 24	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 21 (Dimensionen von Vektorräumen über verschiedenen Körpern, 4 = 2 + 2 Punkte).

Für einen Körper K sollen die im Folgenden auftretenden ganzen Zahlen in dem Sinne als Körperelemente aufgefasst werden, dass sie angeben, wie oft $1 \in K$ aufsummiert wird.
Wir definieren die folgenden Vektoren des K-Vektorraums K^3:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sei $U := \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2, v_3\})$.

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(U)$ und eine Basis von U.

(b) Sei $K = F_p$. Bestimmen Sie $\dim_{F_p}(U)$ und eine Basis von U für jede Primzahl p.

Lösung:

(a) Wir prüfen zunächst die gegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{Q}$-VR $\mathbb{Q}^3$. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{llcrcrcr} I & 0 & = & \lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II & 0 & = & -2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & & \\ III & 0 & = & \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{2\cdot I+II\to II,(-1)\cdot I+III\to III}{\iff} \begin{array}{llcrcrcr} I & 0 & = & \lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ III' & 0 & = & & & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{II'+III'\to III'}{\iff} \begin{array}{llcrcrcr} I & 0 & = & \lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ III'' & 0 & = & & & & & 6\lambda_3 \end{array}$$

Aus III" folgt $\lambda_3 = 0$, eingesetzt in II' folgt $\lambda_2 = 0$ und mit I folgt $\lambda_1 = 0$, d.h. insgesamt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Damit ist (v_1, v_2, v_3) im $\mathbb{Q}$-VR $\mathbb{Q}^3$ linear unabhängig.
$\overset{\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^3=3}{\Rightarrow}$ (v_1, v_2, v_3) Basis von $\mathbb{Q}^3$ $\overset{\mathbb{Q}^3=\mathrm{Lin}(\{v_1,v_2,v_3\})=U\subset\mathbb{Q}^3}{\Rightarrow}$ $U = \mathbb{Q}^3$, $\dim_{\mathbb{Q}} U = 3$, Basis von U ist (v_1, v_2, v_3).

(b) Wie in (a) untersuchen wir die Vektoren zunächst auf lineare Unabhängigkeit im F_p-VR F_p^3. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F_p$ mit

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lcccccccc} I & 0 & = & \lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ III'' & 0 & = & & & & & 6\lambda_3 \end{array}$$

Beachte: Aufgrund der Konvention in der Aufgabenstellung (ganze Zahlen geben an wie häufig 1 aufsummiert wird) ist es möglich, sämtliche ganzen Zahlen zu verwenden, auch wenn sie formal kein Element von F_p sind. Man muss sich aber bewusst sein, dass die Zahlen p, 2p, 3p etc. in F_p aber weiterhin der 0 entsprechen und demzufolge keine multiplikativ Inversen besitzen. Beachte weitere Anmerkung auf der Präsenzblatt-Lösung.
Da bei den Umformungen in (a) keine multiplikativ Inversen verwendet wurden, ist obige Äquivalenz auch hier gültig.

- Fall $p \geq 7$. Dann besitzen alle Koeffizienten im LGS I,II',III" multiplikativ Inverse und wie in (a) erhalten wir, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis des F_p^3 bildet und somit $U = F_p^3$, $\dim_{F_p}(U) = 3$, Basis von U ist (v_1, v_2, v_3).
- Fall $p = 5$. Dann gilt: I,II',III" ist

$$\begin{array}{lcccccccc} I & 0 & = & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & & & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3. \\ III'' & 0 & = & & & & & \lambda_3 \end{array}$$

  Wie in (a) erhalten wir, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis des F_5^3 bildet und somit $U = F_5^3$, $\dim_{F_5}(U) = 3$, Basis von U ist (v_1, v_2, v_3).
- Fall $p = 3$. Dann gilt: I,II',III" ist

$$\begin{array}{lcccccccc} I & 0 & = & \lambda_1 & & & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3. \\ III'' & 0 & = & 0 & & & & \end{array}$$

  Wähle $\lambda_2 = 1$, mit II' folgt $\lambda_3 = -2^{-1}\lambda_2 = \lambda_2 = 1$, mit I folgt $\lambda_1 = -\lambda_3 = 2$.
  $\Rightarrow 0 = 2v_1 + v_2 + v_3$. (*)
  $\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ ist linear abhängig.
  Wegen (*) gilt $v_3 = -2v_1 - v_2$ und daher $U = \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2\})$.
  (v_1, v_2) ist offensichtlich linear unabhängig, denn $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und umgekehrt.
  $\Rightarrow$ Eine Basis von U ist (v_1, v_2), $\dim_{F_3} U = 2$.

- Fall $p = 2$.

Dann gilt: I,II',III" ist

$$\begin{array}{rrcccccc} I & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & 0 & & & & \\ III'' & 0 & = & 0 & & & & \end{array}.$$

Anmerkung: Gerade in F_2 verändert die Addition $2 \cdot I + II \to II$ in der LGS-Umformung in (a) nichts an der Gleichung II (es wird de facto $0 \cdot I + II \to II$ gerechnet). In diesem Sinne könnte man statt II' oben auch II schreiben.

Wähle $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 1$, mit I folgt $\lambda_1 = 0$. $\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ ist linear abhängig.

Tatsächlich ist in F_2^3:

$$v_1 = v_2 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $U = \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathrm{Lin}(\{v_1\})$.
(v_1) ist offensichtlich linear unabhängig, denn $v_1 \neq 0$.
$\Rightarrow$ Eine Basis von U ist (v_1), $\dim_{F_2} U = 1$.

Aufgabe 22 (Basen von Polynomräumen, 4 = 1.5 + 1 + 1.5 Punkte).

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ der Abbildungen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ und für $D \in \mathbb{N}$ den Untervektorraum

$$P_D = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} | \exists c_0, ..., c_D \in \mathbb{Q} : \forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = \sum_{k=0}^{D} c_k x^k\}$$

der Polynome vom Grad höchstens D. Für $i \in \mathbb{N}$ seien $q_0, q_i, p_0, p_i \in P_D$ gegeben mit $p_0(x) = 1$ und $p_i(x) = x^i$, sowie $q_0(x) = 1$ und $q_i(x) = x \cdot (x-1) \cdot ... \cdot (x - i + 1)$, $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) $(p_0, ..., p_D)$ ist ein Erzeugendensystem von P_D, und $(q_0, ..., q_D)$ ist linear unabhängig.

(b) $\dim_{\mathbb{Q}}(P_D) = D + 1$.

(c) Sei nun
$$P := \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \,|\, \exists D \in \mathbb{N} : f \in P_D\}$$
der Untervektorraum aller Polynome. Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{Q}}(P) = \infty$, und geben Sie eine Basis von P an.

Lösung:

(a)
- Zu zeigen ist $\mathrm{Lin}(\{p_0, ..., p_D\}) = P_D$.
  „$\subset$“: ist klar, denn $p_0, ..., p_D \in P_D$.
  „$\supset$“: Sei $f \in P_D$ beliebig.
  $\Rightarrow$ Es gibt $c_0, ..., c_D \in \mathbb{Q}$ mit $\forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = \sum_{k=0}^{D} c_k x^k$.
  $\Rightarrow$ Für beliebiges $x \in \mathbb{Q}$ gilt:
  $$f(x) = \sum_{k=0}^{D} c_k x^k = \sum_{k=0}^{D} c_k p_k(x)$$
  $\Rightarrow f = \sum_{k=0}^{D} c_k p_k \in \mathrm{Lin}(\{p_0, ..., p_D\})$.
- Zu zeigen ist: $(q_0, ..., q_D)$ linear unabhängig.
  Seien $\lambda_0, ..., \lambda_D \in \mathbb{Q}$ beliebig mit $\sum_{k=0}^{D} \lambda_k q_k = 0$.
  $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q} : \sum_{k=0}^{D} \lambda_k q_k(x) = 0$.

– Möglichkeit 1 (ohne Induktion): Es folgt
(1) $0 = \sum_{k=0}^{D} \lambda_k q_k(0) = \lambda_0$,
(2) $0 = \sum_{k=0}^{D} \lambda_k q_k(1) = \lambda_0 + \lambda_1$,
(3) $0 = \sum_{k=0}^{D} \lambda_k q_k(2) = \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2 \cdot 1 \cdot \lambda_2$,
...
(D) $0 = \sum_{k=0}^{D} \lambda_k q_k(D) = \lambda_0 + D\lambda_1 + D \cdot (D-1) \cdot \lambda_2 + ... + D \cdot (D-1) \cdot ... \cdot 1 \cdot \lambda_D$.
$\overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda_0 = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} ... \overset{(D)}{\Rightarrow} \lambda_D = 0$.

– Möglichkeit 2 (mit Induktion): Wir zeigen $\lambda_i = 0$ $(i = 0, ..., D)$.
Induktionsanfang: $0 = \sum_{k=0}^{D} \lambda_k q_k(0) = \lambda_0$.
Induktionsschritt: Gelte $\lambda_1 = ... = \lambda_i = 0$ (IV). Wir zeigen: $\lambda_{i+1} = 0$. Beweis:

$$0 = \sum_{k=0}^{D} \lambda_k q_k(i+1) \overset{k>i+1 \Leftrightarrow q_k(i+1)=0}{=} \sum_{k=0}^{i+1} \lambda_k q_k(i+1) \overset{IV}{=} \underbrace{q_{i+1}(i+1)}_{=(i+1)\cdot i \cdot ... \cdot 1 \neq 0} \cdot \lambda_{i+1},$$

d.h. $\lambda_{i+1} = 0$.

(b) Austauschsatz und (a) $(q_0, ..., q_D)$ linear unabhängig $\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} P_D \geq D + 1$.
Basisauswahlsatz und (a) $(p_0, ..., p_D)$ Erzeugendensystem von $P_D \Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} P_D \leq D + 1$.
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} P_D = D + 1$.

(c)
- Angenommen, $R := \dim_{\mathbb{Q}} P < \infty$.
$\Rightarrow$ Alle Basen haben Länge R. Aber: $(q_0, ..., q_R)$ sind linear unabhängig in $P_R \subset P$.
Austauschsatz $\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} P \geq R + 1$, Widerspruch.
- Wir zeigen: $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist Basis von P. Wir nutzen, dass aus (b) folgt: $(p_0, ..., p_D)$ ist Basis von P_D.
  – $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist Erzeugendensystem, denn:
  Sei $f \in P$
  $\Rightarrow$ Es gibt $D \in \mathbb{N}$ mit $f \in P_D$
  $\overset{(p_0, ..., p_D) \text{ Erzeugendensystem von } P_D}{\Rightarrow}$ Es gibt $\lambda_0, ..., \lambda_D \in \mathbb{Q}$ mit $f = \lambda_0 p_0 + ... + \lambda_D p_D \in \mathrm{Lin}(\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}_0})$.
  – $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist linear unabhängig, denn:
  Sei $J \subset \mathbb{N}_0$ endliche Teilmenge, $\lambda_j \in \mathbb{Q}$ $(j \in J)$ mit $\sum_{j \in J} \lambda_j p_j = 0$.
  J endlich $\Rightarrow$ Es gibt $D \in \mathbb{N}$ mit $J \subset \{0, ..., D\}$.
  $\overset{(p_0, ..., p_D) \text{ linear unabhängig}}{\Rightarrow}$ $\lambda_j = 0$ $(j \in J)$.

Aufgabe 23 (Beweise mit Dimensionen von Vektorräumen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K V = n$. Seien ferner $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\dim_K(U_1) = \dim_K(U_2) = n - 1$, so ist $\dim_K(U_1 \cap U_2) \geq n - 2$.

(b) Gilt $\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) > n$, so folgt $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

Lösung:

(a) Sei $v_1, ..., v_r$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$.
Basisergänzungssatz $\Rightarrow$ Es gibt $v_{r+1}, ..., v_{n-1} \in U_1$, so dass $(v_1, ..., v_{n-1})$ Basis von U_1.
Basisergänzungssatz $\Rightarrow$ Es gibt $w_{r+1}, ..., w_{n-1} \in U_2$, so dass $(v_1, ..., v_r, w_{r+1}, ..., w_{n-1})$ Basis von U_2.
Hinzugefügt wurden also jeweils $n - r - 1$ Elemente.

Wir zeigen nun, dass $(v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_{n-1}, w_{r+1}, ..., w_{n-1})$ linear unabhängig ist (*).
$\overset{\text{Basisaustauschsatz}}{\Rightarrow} r + (n-r-1) + (n-r-1) \leq \dim_K(V) = n$
$\overset{\text{umformen}}{\Rightarrow} \dim_K(U_1 \cap U_2) = r \geq n-2.$

Beweis von (*):
Seien $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, \mu_{r+1}, .., \mu_{n-1} \in K$ mit

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \mu_{r+1} w_{r+1} + ... + \mu_{n-1} w_{n-1} = 0$$
$$\Rightarrow \quad v := \underbrace{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_{n-1} v_{n-1}}_{\in U_1} = \underbrace{-\mu_{r+1} w_{r+1} - ... - \mu_{n-1} w_{n-1}}_{\in U_2} \quad (**),$$

d.h. $v \in U_1 \cap U_2$.
$\Rightarrow$ Es gibt $\alpha_1, ..., \alpha_r \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r$
$\Rightarrow$ Wir haben zwei Darstellungen

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + 0 \cdot w_{r+1} + ... + 0 \cdot w_{n-1} \\ &= 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_r + (-\mu_1) \cdot w_{r+1} + ... + (-\mu_{n-1}) \cdot w_{n-1} \end{aligned}$$

von $v \in U_2$ in der Basis von U_2
$\overset{\text{eindeutige Darstellung}}{\Rightarrow} \mu_{r+1} = ... = \mu_{n-1} = 0.$
$\overset{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + ... + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0$
$\overset{(v_1,...,v_{n-1}) \text{ Basis}}{\Rightarrow} \lambda_1 = ... = \lambda_r = \lambda_{r+1} = ... = \lambda_{n-1} = 0.$

(b)
- Möglichkeit 1 (elementar): Sei $(v_1, ..., v_r)$ Basis von U_1 und $(w_1, ..., w_s)$ Basis von U_2.
  $\Rightarrow (v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s)$ hat Länge $r + s = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) > \dim_K(V)$
  Austauschsatz $\Rightarrow (v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s)$ ist linear abhängig (sonst wäre $\dim_K(V) \geq r + s$).
  $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ und $\mu_1, ..., \mu_s \in K$, $(\lambda_1, ..., \lambda_r, \mu_1, ..., \mu_s) \neq (0, ..., 0)$ mit

  $$0 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r + \mu_1 v_1 + ... + \mu_s v_s.$$

  Angenommen, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Dann folgt

  $$x := \underbrace{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r}_{\in U_1} = \underbrace{-\mu_1 v_1 - ... - \mu_s v_s}_{\in U_2},$$

  d.h. $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x = 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = -\mu_1 v_1 - ... - \mu_s v_s = 0$
  $\overset{(v_1,...,v_r),\ (w_1,...,w_s) \text{ Basen}}{\Rightarrow} \lambda_1 = ... = \lambda_r = \mu_1 = ... = \mu_s = 0,$
  Widerspruch! Also gilt $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.
- Möglichkeit 2 (mit P23(c)): Wir zeigen die Kontraposition der Behauptung, d.h.:

  $$U_1 \cap U_2 = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) \leq n.$$

  Gelte $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
  P23(c) $\Rightarrow \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) = \dim_K(U_1 + U_2)$ (*)
  U_1, U_2 UVR von $V \Rightarrow U_1 + U_2$ ist UVR von $V \Rightarrow \dim_K(U_1 + U_2) \leq \dim_K(V) = n$
  $\overset{(*)}{\Rightarrow} \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) \leq n.$

Aufgabe 24 (Rechnen mit Matrizen, 4 = 1 + 0.5 + 1 + 0.5 + 1 Punkte).
Berechnen Sie die folgenden Produkte und Summen von Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, sofern sie definiert sind:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}^{123}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{79}$

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Analog sehen wir, dass $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 2 & 2 \cdot (-2) + 4 \\ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Analog dazu berechnen wir $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 & -1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & -6 \\ -4 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Die Addition $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert.

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Die Multiplikation $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert.

(e) Wir definieren $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Dann ist $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{pmatrix}$ und $A^3 = 0$. Daher ist $A^{123} = 0$.

Definiere $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Dann gilt $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = B$, weswegen $B^{79} = B$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **29. November 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`