UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

6. Abgabeblatt

Aufgabe 21	Aufgabe 22	Aufgabe 23	Aufgabe 24	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 21 (Dimensionen von Vektorräumen über verschiedenen Körpern, 4 = 2 + 2 Punkte).

Für einen Körper K sollen die im Folgenden auftretenden ganzen Zahlen in dem Sinne als Körperelemente aufgefasst werden, dass sie angeben, wie oft $1 \in K$ aufsummiert wird.
Wir definieren die folgenden Vektoren des K-Vektorraums K^3:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sei $U := \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2, v_3\})$.

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(U)$ und eine Basis von U.

(b) Sei $K = F_p$. Bestimmen Sie $\dim_{F_p}(U)$ und eine Basis von U für jede Primzahl p.

Aufgabe 22 (Basen von Polynomräumen, 4 = 1.5 + 1 + 1.5 Punkte).

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ der Abbildungen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ und für $D \in \mathbb{N}$ den Untervektorraum

$$P_D = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} | \exists c_0, ..., c_D \in \mathbb{Q} : \forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = \sum_{k=0}^{D} c_k x^k\}$$

der Polynome vom Grad höchstens D. Für $i \in \mathbb{N}$ seien $q_0, q_i, p_0, p_i \in P_D$ gegeben mit $p_0(x) = 1$ und $p_i(x) = x^i$, sowie $q_0(x) = 1$ und $q_i(x) = x \cdot (x-1) \cdot ... \cdot (x-i+1)$, $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) $(p_0, ..., p_D)$ ist ein Erzeugendensystem von P_D, und $(q_0, ..., q_D)$ ist linear unabhängig.

(b) $\dim_{\mathbb{Q}}(P_D) = D + 1$.

(c) Sei nun
$$P := \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \,|\, \exists D \in \mathbb{N} : f \in P_D\}$$
der Untervektorraum aller Polynome. Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{Q}}(P) = \infty$, und geben Sie eine Basis von P an.

Aufgabe 23 (Beweise mit Dimensionen von Vektorräumen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K V = n$. Seien ferner $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\dim_K(U_1) = \dim_K(U_2) = n - 1$, so ist $\dim_K(U_1 \cap U_2) \geq n - 2$.

(b) Gilt $\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) > n$, so folgt $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

Aufgabe 24 (Rechnen mit Matrizen, 4 = 1 + 0.5 + 1 + 0.5 + 1 Punkte).
Berechnen Sie die folgenden Produkte und Summen von Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, sofern sie definiert sind:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}^{123}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{79}$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **29. November 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`