UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

5. Abgabeblatt - Lösungen

Aufgabe 17	Aufgabe 18	Aufgabe 19	Aufgabe 20	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 17 (Lineare Unabhängigkeit in verschiedenen Vektorräumen, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Untersuchen Sie die folgenden Mengen von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im angegebenen Vektorraum.

(a) $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ im Standardvektorraum F_3^3 über F_3.

(b) Die Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ definiert durch $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ und $f_3(x) = \sin(2x)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(c) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := 1, \quad b_n := (-1)^n, \quad c_n := \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Lösung:

(a) Die Vektoren sind linear abhängig (im $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$ wären sie aber linear unabhängig), denn:

Ansatz (muss nicht Bestandteil der Lösung sein): Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F_3$ mit

$$0 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},$$

d.h. löse das LGS (Lineares Gleichungssystem)

$$\begin{array}{lccccccc} I & 0 & = & 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ II & 0 & = & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ III & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \end{array}$$

$$\overset{(-2)\cdot III+II\to II, III+I\to I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lccccccc} I' & 0 & = & & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ II' & 0 & = & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 \\ III' & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \end{array}$$

I' und II' sind äquivalent, daher genügt es II' und III' zu betrachten. Eine Lösung ist $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1 = 2$, $\lambda_1 = 1$.

es gilt

$$0 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Vektoren f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig, denn: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}, \quad (*)$$

wobei $0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$ auf der rechten Seite die Nullabbildung $0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}(x) := 0$ bezeichnet. Aus (*) folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x) + \lambda_3 \cdot f_3(x) = 0,$$

d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \lambda_1 \cdot \sin(x) + \lambda_2 \cdot \cos(x) + \lambda_3 \cdot \sin(2x) = 0 \qquad (**).$$

Wähle $x = \pi$. Dann ergibt sich aus (**): $\lambda_2 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$, d.h. $\lambda_2 = 0$.
Wähle $x = \frac{\pi}{2}$. Aus (**) folgt: $\lambda_1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$, d.h. $\lambda_1 = 0$.
Wähle $x = \frac{\pi}{4}$. Aus (**) folgt: $\lambda_3 \overset{\lambda_1=\lambda_2=0}{=} \lambda_1 \cdot \sin(\pi/4) + \lambda_2 \cdot \cos(\pi/4) + \lambda_3 \cdot 1 = 0$, d.h. $\lambda_3 = 0$.

(c) Die Vektoren $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ sind linear unabhängig, denn: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$ mit

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot \sqrt{2} + \lambda_3 \cdot \sqrt{3} = 0 \quad (*)$$

Dann:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \sqrt{2} + \lambda_3 \cdot \sqrt{3} \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1^2 = (\lambda_2 \cdot \sqrt{2} + \lambda_3 \cdot \sqrt{3})^2 = 2\lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3\sqrt{6}. \end{aligned}$$

- Fall 1: $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Dann folgt $\sqrt{6} = \frac{\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2}{2\lambda_2\lambda_3} \in \mathbb{Q}$ (beachte: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$), Widerspruch. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
- Fall 2: $\lambda_2 = 0$. Dann folgt
$$\lambda_1^2 = 3\lambda_3^2.$$
  - Fall 2.1: $\lambda_3 \neq 0$. Dann folgt aus (*): $-\lambda_1 = \lambda_3\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \in \mathbb{Q}$, Widerspruch. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
  - Fall 2.2: $\lambda_3 = 0$. Dann folgt aus (*) direkt $\lambda_1 = 0$, d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
- Fall 3: $\lambda_3 = 0$: analog zu Fall 2.

Wir haben gezeigt: Jeder Fall ist entweder nicht möglich oder führt zu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(d) Die Vektoren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind linear abhängig. Es gilt nämlich für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases} = c_n,$$

d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n - c_n = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \frac{1}{2}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} - (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 18 (Lineare Unabhängigkeit und Basen im $\mathbb{R}^n$, $4 = 1.5 + 1 + 1.5$ Punkte).
Es sei $t \in \mathbb{R}$. Gegeben seien Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ durch

$$v_1 := (1, 2, t+2), \qquad v_2 := (-1, t+1, t), \qquad v_3 := (0, t, 1)$$

(a) Ermitteln Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

Sei ab jetzt $t = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, e_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet, indem Sie die beiden charakterisierenden Eigenschaften (Erzeugendensystem und linear unabhängig) nachrechnen.

Sei $U_1 := \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ und $U_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \mathrm{Lin}(w_1, w_2)$, wobei $w_1 := (-1, 0, 1)$, $w_2 := (0, -1, 1)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit
$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$
Dies ist äquivalent zum LGS (Lineares Gleichungssystem)

$$\begin{array}{lcll} (I) & 0 & = & \lambda_1 - \lambda_2 \\ (II) & 0 & = & 2\lambda_1 + (t+1)\lambda_2 + t\lambda_3 \\ (III) & 0 & = & (t+2)\lambda_1 + t\lambda_2 + \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{(-2)\cdot I + II \to II,\, (-(t+2))\cdot I + III \to III}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lcll} (I) & 0 & = & \lambda_1 - \lambda_2 \\ (II') & 0 & = & (t+3)\lambda_2 + t\lambda_3 \\ (III') & 0 & = & (2t+2)\lambda_2 + \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{(-t)\cdot III' + II' \to II'}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lcll} (I) & 0 & = & \lambda_1 - \lambda_2 \\ (II') & 0 & = & (-2t^2 - t + 3)\lambda_2 \\ (III'') & 0 & = & (2t+2)\lambda_2 + \lambda_3 \end{array}$$

Betrachte Gleichung (II').

- Fall 1: $-2t^2 - t + 3 = 0$, d.h. $t \in \{-\frac{3}{2}, 1\}$. Dann ist (II') erfüllt für beliebiges $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wähle zum Beispiel $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \overset{(I)}{=} \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 \overset{(III'')}{=} -(2t+2)\lambda_2 = -(2t+2)$. Dann gilt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, aber $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$.
  In diesem Fall sind v_1, v_2, v_3 also linear abhängig.
- Fall 2: $-2t^2 - t + 3 \neq 0$. $\overset{(II')}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0 \overset{(I),(III'')}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$.
  In diesem Fall sind v_1, v_2, v_3 also linear unabhängig.

(b) • (v_1, v_2, e_3) ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, denn: Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$(x, y, z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_3,$$

Dies ist äquivalent zum LGS (Lineares Gleichungssystem)

$$\begin{array}{lcccccccc} (I) & x & = & \lambda_1 & - & \lambda_2 & & \\ (II) & y & = & 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & \\ (III) & z & = & 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{(-2)\cdot I+II\to II, (-3)\cdot I+III\to III}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lcccccccc} (I) & x & = & \lambda_1 & - & \lambda_2 & & \\ (II') & y-2x & = & & & 4\lambda_2 & & \\ (III') & z-3x & = & & & 4\lambda_2 & + & \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{(-1)\cdot II'+III'\to III', \frac{1}{4}\cdot II'+I\to I}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lcccccc} (I') & \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y & = & \lambda_1 & & \\ (II') & y-2x & = & & 4\lambda_2 & \\ (III'') & z-x-y & = & & & \lambda_3 \end{array}$$

Wähle also $\lambda_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y$, $\lambda_3 = z - x - y$, dann gilt

$$(x, y, z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_3.$$

• (v_1, v_2, e_3) ist linear unabhängig, denn: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_3.$$

Dies ist äquivalent zum LGS oben mit $x = y = z = 0$. Oben wurde bereits gezeigt, dass die einzige Lösung durch $\lambda_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 0$ und $\lambda_3 = z - x - y = 0$ gegeben ist.

(c) Wir zeigen: $U_1 \cap U_2 = \mathrm{Lin}((1, -1, 0))$ (*). Eine Basis ist dann automatisch durch $((1, -1, 0))$ gegeben, da ein Vektor ungleich dem Nullvektor linear unabhängig ist.
Beweis von (*): „$\subset$“ (dient auch als Herleitung der Vermutung (*)): Sei $x \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt: Es gibt $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2.$$

Wir erhalten folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcccccccccc} (I) & 0 & = & -\lambda_1 & & & - & \mu_1 & + & \mu_2 \\ (II) & 0 & = & & - & \lambda_2 & - & 2\mu_1 & - & 2\mu_2 \\ (III) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 3\mu_1 & - & \mu_2 \end{array}$$

$$\overset{I+III\to III}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lcccccccccc} (I) & 0 & = & -\lambda_1 & & & - & \mu_1 & + & \mu_2 \\ (II) & 0 & = & & - & \lambda_2 & - & 2\mu_1 & - & 2\mu_2 \\ (III') & 0 & = & & & \lambda_2 & - & 4\mu_1 & & \end{array}$$

$$\overset{II+III'\to III'}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lcccccccccc} (I) & 0 & = & -\lambda_1 & & & - & \mu_1 & + & \mu_2 \\ (II) & 0 & = & & - & \lambda_2 & - & 2\mu_1 & - & 2\mu_2 \\ (III'') & 0 & = & & & & - & 6\mu_1 & - & 2\mu_2 \end{array}$$

Aus (III”) folgt: $\mu_2 = -3\mu_1$, d.h. $x = \mu_1 \cdot (v_1 - 3v_2) = \mu_1 \cdot (4, -4, 0) \in \mathrm{Lin}((1, -1, 0))$.
„$\supset$“: Sei $x \in \mathrm{Lin}((1, -1, 0))$, d.h. es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2, x_3) = x = \lambda \cdot (1, -1, 0) = (\lambda, -\lambda, 0)$.
Dann gilt $x \in U_2$, denn: $x_1 + x_2 + x_3 = \lambda + (-\lambda) + 0 = 0$.
Es gilt auch $x \in U_1$, denn:

Ansatz: Suche $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$(1,-1,0) = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2,$$

d.h. löse das LGS

$$\begin{array}{lrcrcr} (I) & 1 & = & \mu_1 & - & \mu_2 \\ (II) & -1 & = & 2\mu_1 & + & 2\mu_2 \\ (III) & 0 & = & 3\mu_1 & + & \mu_2 \end{array}$$

$$\overset{(-2)\cdot I+II\to II,(-3)\cdot I+III\to III}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lrcrcr} (I) & 1 & = & \mu_1 & - & \mu_2 \\ (II') & -3 & = & & & 4\mu_2 \\ (III') & -3 & = & & & 4\mu_2 \end{array}$$

(II') und (III') sind äquivalent; also betrachte nur (I) und (II'). Aus (II') folgt $\mu_2 = -\frac{3}{4}$, eingesetzt in (I) folgt $\mu_1 = 1 + \mu_2 = \frac{1}{4}$.

es gilt $x = \lambda \cdot (1,-1,0) = \lambda \cdot (\frac{1}{4}v_1 - \frac{3}{4}v_2) = \frac{\lambda}{4}v_1 - \frac{3\lambda}{4}v_2 \in \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2\}) = U_1$.

Aufgabe 19 (Beweise mit linearer Unabhängigkeit und Basen, 4 = 2 + 2 Punkte). Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(a) Seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume von V mit der Eigenschaft

$$V = U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \quad \text{und} \quad U_1 \cap U_2 = \{0_V\}.$$

Sei $B_1 = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von U_1, $B_2 = (b'_1, ..., b'_m)$ eine Basis von U_2. Zeigen Sie: $B := (b_1, ..., b_n, b'_1, ..., b'_m)$ ist eine Basis von V.

Es sei nun $K = \mathbb{R}$.

(b) Sei $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von V. Ferner sei

$$a_1 := 2b_1 - b_2, \qquad a_2 := b_2 + b_3 + b_4, \qquad a_3 := b_3 - b_4.$$

Zeigen Sie: $A = (a_1, a_2, a_3)$ ist linear unabhängig.

Lösung:

(a)
- B ist ein **Erzeugendensystem** von V, denn:
  Sei $v \in V$ beliebig.
  $\overset{V=U_1+U_2}{\Longrightarrow}$ Es gibt $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$.
  $\overset{B_1, B_2 \text{ Basis}}{\Longrightarrow}$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ und $\mu_1, ..., \mu_m \in K$ mit

  $$u_1 = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n \quad \text{und} \quad u_2 = \mu_1 b'_1 + ... + \mu_m b'_m.$$

  $\Longrightarrow v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n + \mu_1 b'_1 + ... + \mu_m b'_m \in \mathrm{Lin}(B)$.
- B ist **linear unabhängig**, denn:
  Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ und $\mu_1, ..., \mu_m \in K$ mit $\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n + \mu_1 b'_1 + ... + \mu_m b'_m = 0_V$. Es folgt:

  $$\Longrightarrow \quad U_1 \ni \underbrace{\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n}_{v:=} \quad = \quad -\mu_1 b'_1 - ... - \mu_m b'_m \in U_2$$

  $\Longrightarrow v \in U_1 \cap U_2 \overset{U_1 \cap U_2 = \{0_V\}}{\Rightarrow} v = 0_V$.
  $\Longrightarrow \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n = -\mu_1 b'_1 - ... - \mu_m b'_m = 0_V$
  $\overset{B_1, B_2 \text{ Basis}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = ... = \lambda_n = \mu_1 = ... = \mu_m = 0.$

(b) (i) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ mit $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0_V$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 0_V &= \lambda_1(2b_1 - b_2) + \lambda_2(b_2 + b_3 + b_4) + \lambda_3(b_3 - b_4) \\ &= (2\lambda_1)b_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2)b_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)b_3 + (\lambda_2 - \lambda_3)b_4 \end{aligned}$$

$\overset{B \text{ ist Basis}}{\Longrightarrow}$ (I) $2\lambda_1 = 0$, (II) $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, (III) $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, (IV) $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$
$\overset{(I)}{\Longrightarrow} \lambda_1 = 0 \overset{(II)}{\Longrightarrow} \lambda_2 = 0 \overset{(III)}{\Longrightarrow} \lambda_3 = 0$, und (IV) wird damit erfüllt,
d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist die einzige Lösung.

Aufgabe 20 (Fibonacci-Folgenraum, 6 = 2 + 1 + 2 + 1 Punkte (davon 2 = 1 + 0 + 1 + 0 Bonuspunkte jeweils für den Erzeugendensystem-Beweis mit Induktion)).
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellwertigen Folgen (vgl. Blatt 4, Aufgabe 16), und den Untervektorraum

$$F := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \, \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = ((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ mit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ und $v_1 := 1$, $v_2 := 0$ und $w_1 := 0$, $w_2 := 1$ eine Basis von F bildet.
Hinweis: Um zu zeigen, dass B ein Erzeugendensystem bildet, zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ erfüllt: $\forall n \in \mathbb{N} : c_n = c_1 \cdot v_n + c_2 \cdot w_n$.

(b) Finden Sie zwei verschiedene $r_1, r_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so dass $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
Hinweis: Damit $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ gilt, muss es insbesondere die Rekursionsgleichung erfüllen. Nutzen Sie dies zur Bestimmung von r_1, r_2.

(c) Zeigen Sie, dass $B' := ((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ auch eine Basis von F bildet.
Hinweis: Um zu zeigen, dass B' ein Erzeugendensystem bildet, müssen Sie für beliebiges $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von c_1, c_2, r_1, r_2 finden, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad c_n = \lambda_1 \cdot r_1^n + \lambda_2 \cdot r_2^n.$$

Für die Bestimmung von λ_1, λ_2 nutzen Sie diese Eigenschaft für $n = 1, 2$.

(d) Sei nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ die (Standard-)Fibonacci-Folge, d.h. $c_1 = c_2 := 1$. Berechnen Sie die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ aus (c) und geben Sie damit eine (nicht rekursive) Formel für c_n an.

Lösung:

(a)
- B bildet ein Erzeugendensystem, denn: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ beliebig.
  Wir zeigen: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich als Linearkombination der Elemente aus B schreiben in der Form $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = c_1 \cdot (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + c_2 \cdot (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. wir zeigen:
  Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
  $$c_n = c_1 \cdot v_n + c_2 \cdot w_n \quad (*).$$
  Beweis: Per vollständiger Induktion.
  Induktionsanfang $n = 1$: $c_1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot w_1$.
  $n = 2$: $c_2 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_1 \cdot v_2 + c_2 \cdot w_2$.
  Induktionsschritt: Sei $n \geq 2$. Die Aussage (*) gelte für alle $1, ..., n$ (IV).
  Dann ist
  $$\begin{aligned} c_{n+1} &\overset{(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F}{=} c_n + c_{n-1} \overset{IV}{=} (c_1 v_n + c_2 w_n) + (c_1 v_{n-1} + c_2 w_{n-1}) \\ &= c_1(v_n + v_{n-1}) + c_2(w_n + w_{n-1}) \overset{(v_n)_{n\in\mathbb{N}},(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F}{=} c_1 v_{n+1} + c_2 w_{n+1}. \end{aligned}$$

- B ist linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_1(v_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  $\Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 = \lambda_1$, d.h. $\lambda_1 = 0$.
  $\Rightarrow 0 = \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = \lambda_2$, d.h. $\lambda_2 = 0$.
  Damit folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

(b) *Ansatz für die Bestimmung von $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$: Es muss gelten $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, d.h.*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad r_1^{n+2} = r_1^{n+1} + r_1^n \quad \Rightarrow \quad r_1^2 = r_1 + 1.$$

Lösungen von $r_1^2 - r_1 - 1 = 0$ sind $r_1 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Wähle $r_1 := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $r_2 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (diese haben die Eigenschaft $r_1^2 = r_1 + 1$, $r_2^2 = r_2 + 1$).
Es gilt nun $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, denn: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r_1^{n+2} = r_1^n \cdot r_1^2 = r_1^n \cdot (r_1 + 1) = r_1^{n+1} + r_1^n,$$

analog $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Beweis B' ist Basis:

- B' bildet Erzeugendensystem, denn: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ beliebig.

  Ansatz: Suche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} (I) \quad c_1 &= \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2, \\ c_2 &= \lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2 \overset{r_1^2=r_1+1, r_2^2=r_2+1}{=} \lambda_1(r_1+1) + \lambda_2(r_2+1) \overset{(I)}{=} c_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \\ &\iff (II) \quad c_2 - c_1 = \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

  Addition $II \cdot (-r_1) + I \to I$ liefert das äquivalente LGS

$$\begin{aligned} (I') \quad c_1 - r_1(c_2 - c_1) &= \lambda_2(r_2 - r_1), \\ (II) \quad c_2 - c_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

  (I') liefert $\lambda_2 = \frac{c_1 - r_1(c_2-c_1)}{r_2 - r_1}$, Einsetzen in (II) liefert $\lambda_1 = (c_2 - c_1) - \lambda_2 = \frac{r_2(c_2-c_1)-c_1}{r_2-r_1}$.

  Wir zeigen: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich als Linearkombination der Elemente aus B' schreiben in der Form $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda_1 \cdot (r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2 \cdot (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lambda_1 = \frac{r_2(c_2 - c_1) - c_1}{r_2 - r_1} = \frac{r_2(c_2 - c_1) - c_1}{\sqrt{5}}, \qquad \lambda_2 = \frac{c_1 - r_1(c_2 - c_1)}{r_2 - r_1} = \frac{c_1 - r_1(c_2 - c_1)}{\sqrt{5}},$$

  d.h. wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$c_n = \lambda_1 \cdot v_n + \lambda_2 \cdot w_n \quad (*).$$

  Beweis: Per vollständiger Induktion (analog zu (a)):
  Induktionsanfang $n = 1$: $\lambda_1 \cdot r_1 + \lambda_2 \cdot r_2 = ... = c_1$,
  $n = 2$: $\lambda_1 \cdot r_1^2 + \lambda_2 \cdot r_2^2 = ... = c_2$.
  Induktionsschritt: Sei $n \geq 2$. Die Aussage (*) gelte für alle $1, ..., n$ (IV).
  Dann ist

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\overset{(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F}{=} c_n + c_{n-1} \overset{IV}{=} (c_1 r_1^n + c_2 r_2^n) + (c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_2^{n-1}) \\ &= c_1 r_1^{n-1}(r_1 + 1) + c_2 r_2^{n-1}(r_2 + 1) \overset{r_1^2=r_1+1, r_2^2=r_2+1}{=} c_1 r_1^{n-1} r_1^2 + c_2 r_2^{n-1} r_2^2 \\ &= c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1}. \end{aligned}$$

- B ist linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_1(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  $\overset{n=1,2}{\Rightarrow} 0 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2,\ 0 = \lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2 = \lambda_1(r_1+1) + \lambda_2(r_2+1)$.
  $\Rightarrow 0 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$ (I), $0 = \lambda_1 + \lambda_2$ (II)
  $\overset{II\cdot(-r_1)+I\to I}{\Rightarrow} 0 = \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1) \Rightarrow \lambda_2 = 0 \overset{II}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0$.
  Das heißt, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

(d) Aus (c) sind die expliziten Formeln für λ_1, λ_2 bekannt (einsetzen von $c_1 = c_2 = 1$):

$$\lambda_1 = \frac{r_2(c_2 - c_1) - c_1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \lambda_2 = \frac{c_1 - r_1(c_2 - c_1)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

d.h.

$$c_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **22. November 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`