Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

5. Abgabeblatt

Aufgabe 17	Aufgabe 18	Aufgabe 19	Aufgabe 20	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 17 (Lineare Unabhängigkeit in verschiedenen Vektorräumen, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Untersuchen Sie die folgenden Mengen von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im angegebenen Vektorraum.

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Standardvektorraum F_3^3 über F_3.

(b) Die Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ definiert durch $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ und $f_3(x) = \sin(2x)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(c) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := 1, \quad b_n := (-1)^n, \quad c_n := \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Aufgabe 18 (Lineare Unabhängigkeit und Basen im $\mathbb{R}^n$, 4 = 1.5 + 1 + 1.5 Punkte).

Es sei $t \in \mathbb{R}$. Gegeben seien Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ durch

$$v_1 := (1, 2, t+2), \qquad v_2 := (-1, t+1, t), \qquad v_3 := (0, t, 1)$$

(a) Ermitteln Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

Sei ab jetzt $t = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, e_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet, indem Sie die beiden charakterisierenden Eigenschaften (Erzeugendensystem und linear unabhängig) nachrechnen.

Sei $U_1 := \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ und $U_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \mathrm{Lin}(w_1, w_2)$, wobei $w_1 := (-1, 0, 1)$, $w_2 := (0, -1, 1)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 19 (Beweise mit linearer Unabhängigkeit und Basen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(a) Seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume von V mit der Eigenschaft

$$V = U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \quad \text{und} \quad U_1 \cap U_2 = \{0_V\}.$$

Sei $B_1 = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von U_1, $B_2 = (b'_1, ..., b'_m)$ eine Basis von U_2. Zeigen Sie: $B := (b_1, ..., b_n, b'_1, ..., b'_m)$ ist eine Basis von V.

Es sei nun $K = \mathbb{R}$.

(b) Sei $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von V. Ferner sei

$$a_1 := 2b_1 - b_2, \qquad a_2 := b_2 + b_3 + b_4, \qquad a_3 := b_3 - b_4.$$

Zeigen Sie: $A = (a_1, a_2, a_3)$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 20 (Fibonacci-Folgenraum, 6 = 2 + 1 + 2 + 1 Punkte (davon 2 = 1 + 0 + 1 + 0 Bonuspunkte jeweils für den Erzeugendensystem-Beweis mit Induktion)).
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellwertigen Folgen (vgl. Blatt 4, Aufgabe 16), und den Untervektorraum

$$F := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = ((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ mit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ und $v_1 := 1$, $v_2 := 0$ und $w_1 := 0$, $w_2 := 1$ eine Basis von F bildet.
Hinweis: Um zu zeigen, dass B ein Erzeugendensystem bildet, zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ erfüllt: $\forall n \in \mathbb{N} : c_n = c_1 \cdot v_n + c_2 \cdot w_n$.

(b) Finden Sie zwei verschiedene $r_1, r_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so dass $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
Hinweis: Damit $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ gilt, muss es insbesondere die Rekursionsgleichung erfüllen. Nutzen Sie dies zur Bestimmung von r_1, r_2.

(c) Zeigen Sie, dass $B' := ((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ auch eine Basis von F bildet.
Hinweis: Um zu zeigen, dass B' ein Erzeugendensystem bildet, müssen Sie für beliebiges $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von c_1, c_2, r_1, r_2 finden, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad c_n = \lambda_1 \cdot r_1^n + \lambda_2 \cdot r_2^n.$$

Für die Bestimmung von λ_1, λ_2 nutzen Sie diese Eigenschaft für $n = 1, 2$.

(d) Sei nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ die (Standard-)Fibonacci-Folge, d.h. $c_1 = c_2 := 1$. Berechnen Sie die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ aus (c) und geben Sie damit eine (nicht rekursive) Formel für c_n an.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **22. November 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`