UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

4. Abgabeblatt - Lösungen

Aufgabe 13	Aufgabe 14	Aufgabe 15	Aufgabe 16	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 13 (Beispiele / Gegenbeispiele für (Unter-)Vektorräume, 4 = 2 + 2 Punkte).

Beantworten Sie die folgenden Fragen entweder durch einen Nachweis oder durch Angabe der verletzten Eigenschaft mit einem expliziten Gegenbeispiel:

(a) Sind die folgenden Mengen Untervektorräume des Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ (mit komponentenweiser Multiplikation und Addition)?

(i) $U_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y = 0 \text{ oder } 3y + 4z = 0\}$,

(ii) $U_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y + z = 5\}$,

(iii) $U_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$,

(iv) $U_4 := \{(2\lambda, \lambda, \lambda^2) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(b) Sind die folgenden Strukturen $(V, +_V)$ Vektorräume über dem jeweils angegebenen Körper K und der angegebenen skalaren Multiplikation $\cdot_V$? Hierbei bezeichnen „+“ stets die normale (bzw. komponentenweise) Addition und „·“ die normale Multiplikation.

(i) $(V, +_V) = (\mathbb{Z}, +)$ über $K = F_5$ mit $\cdot_V : F_5 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a, z) \mapsto a \cdot z$,

(ii) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{R}$ mit $\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (a \cdot x, 0)$,

(iii) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{R}$ mit $\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (a^2 \cdot x, a^2 \cdot y)$,

(iv) $(V, +_V) = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ über $K = \mathbb{R}$ mit $\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, (a, x) \mapsto x^a$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis nutzen, dass $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ *eine abelsche Gruppe bildet.*

Lösung: (a) (i) Kein UVR. Wähle zum Beispiel $v := (-3, 2, 0) \in U_1$ (erfüllt 1. Bedingung in U_1) und $w := (0, -4, 3) \in U_1$ (erfüllt 2. Bedingung in U_1). Dann ist $v + w = (-3, 2, 0) + (0, -4, 3) = (-3, -2, 3) \notin U_1$, denn $2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) = -12 \neq 0$, $3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 6 \neq 0$.

(ii) Kein UVR. Es ist $(x, y, z) = (0, 0, 0) \notin U_2$, denn $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 5$. Da $(0, 0, 0)$ aber der Nullvektor in $\mathbb{R}^3$ ist, müsste er laut VL auch in jedem UVR enthalten sein.

(iii) Ist UVR. Da $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ nur durch $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ gelöst wird, gilt $U_3 = \{(0, 0, 0)\}$. Dies ist laut VL stets ein UVR.

(iv) Ist kein UVR. Zum Beispiel sind $v := (2, 1, 1) \in U_1$ $(\lambda = 1)$, aber $2 * v = (4, 2, 2) \notin U_1$, denn:
Angenommen, $(4, 2, 2) \in U_1$, so gäbe es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(2\lambda, \lambda, \lambda^2) = (4, 2, 2)$
$\Rightarrow \lambda = 2$ (1.,2. Komponente), $\lambda = \sqrt{2}$ (3. Komponente), Widerspruch.

(b) (i) Kein VR. Verträglichkeit mit skalarer Multiplikation ist verletzt. Wähle zum Beispiel $\lambda = 2 \in F_5$, $\mu = 3 \in F_5$ und $v = 7 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \underbrace{(2 \cdot 3)}_{=1 \text{ in } F_5} \cdot 7 = 1 \cdot_V 7 \overset{\text{Def. Skal.mult.}}{=} 7,$$

aber

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = 2 \cdot (3 \cdot 7) =^{\text{Def. Skal.mult.}} 2 \cdot_V 21 \overset{\text{Def. Skal.mult.}}{=} 42,$$

d.h. $(\lambda \cdot \mu) \cdot v \neq \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.

(ii) Kein VR. Verträglichkeit mit skalarer Multiplikation ist verletzt. Wähle zum Beispiel $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ und das Einselement $1 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $1 \cdot v \overset{\text{Def. Skal.mult.}}{=} (1 \cdot 1, 0) = (1, 0) \neq v$.

(iii) Kein VR. Verträglichkeit mit skalarer Multiplikation ist verletzt. Wähle zum Beispiel $\lambda = 2 \in R$, $\mu = 3 \in \mathbb{R}$ und $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$(\lambda + \mu) \cdot_V v = 5 \cdot_V (1, 1) \overset{\text{Def. Skal.mult.}}{=} (5^2 \cdot 1, 5^2 \cdot 1) = (25, 25),$$

aber

$$\begin{aligned} \lambda \cdot_V v + \mu \cdot_V v &= 2 \cdot_V (1, 1) + 3 \cdot_V (1, 1) \overset{\text{Def. Skal.mult.}}{=} (2^2 \cdot 1, 2^2 \cdot 1) + (3^2 \cdot 1, 3^2 \cdot 1) \\ &= (4, 4) + (9, 9) = (13, 13), \end{aligned}$$

d.h. $(\lambda + \mu) \cdot v \neq \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.

(iv) Ist VR. $(\mathbb{R}, +)$ ist laut VL eine abelsche Gruppe. Es bleibt die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation zu zeigen. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt:

- $(\lambda + \mu) \cdot_V x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda \cdot x^\mu = \lambda \cdot_V x +_V \mu \cdot_V x$.
- $\lambda \cdot_V (x +_V y) = (x \cdot y)^\lambda = x^\lambda \cdot y^\lambda = x^\lambda +_V y^\lambda = \lambda \cdot_V x +_V \mu \cdot_V y$.
- $\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V x) = \lambda \cdot_V x^\mu = (x^\mu)^\lambda = x^{\mu \cdot \lambda} = (\mu \cdot \lambda) \cdot_V x$.
- $1 \cdot_V x = x^1 = x$.

Aufgabe 14 (Rechnen im Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$, 4 = 2 + 2 Punkte).

Wir betrachten den Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ mit der üblichen komponentenweisen Addition und Multiplikation. Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ werden hier als Spalten anstelle von Zeilen dargestellt.

(a) Schreiben Sie die folgenden Untervektorräume U_i $(i = 1, 2, 3)$ des $\mathbb{R}^3$ als lineare Hülle von möglichst wenig Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
U_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \right\} \\
U_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : x_1 - x_2 = 0, x_3 - 2x_2 = 0 \right\}
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in U_1 und U_2 liegt, indem Sie ihn als Linearkombination der Vektoren der in (a) bestimmten linearen Hüllen darstellen.

Lösung:

Hinweis: Es gibt hier keine eindeutigen Ergebnisse für die lineare Hüllen in (a), viele Darstellungen sind möglich. Entsprechend ist auch die Darstellung in (b) nicht eindeutig.

(a) (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Lin}(\{v_1, v_2, v_3\}), \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies ist jedoch nicht die minimal mögliche Anzahl an Vektoren.

Die folgende Herleitung muss nicht Teil der Lösung sein: Überprüfe, ob $v_1 \in Lin(\{v_2, v_3\})$ durch Lösen eines Gleichungssystems in $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& v_1 = a \cdot v_2 + b \cdot v_3 \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + 4b \\ a + 3b \\ 3a - b \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \begin{array}{rcll} 2 &=& a + 3b & I \\ 1 &=& -2a + 4b & II \\ 1 &=& 3a - b & III \end{array} \\
\overset{2 \cdot I + II \to II, -3 \cdot I + III \to III}{\iff} \quad & \begin{array}{rcll} 2 &=& a + 3b & I \\ 5 &=& 10b & II' \\ -5 &=& -10b & III' \end{array}
\end{aligned}$$

II' und III' sind äquivalent, daher kann III' weggelassen werden. Die (einzige) Lösung von II' ist $b = \frac{1}{2}$ und daher (einsetzen in I): $a = \frac{1}{2}$.

Tatsächlich gilt:

$$v_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3,$$

d.h. $v_1 \in \text{Lin}(\{v_2, v_3\})$. Mit Aufgabe P15(c) folgt: $U_1 = \text{Lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \text{Lin}(\{v_2, v_3\})$.
Anmerkung: Weniger Vektoren sind nicht möglich, denn dann müsste gelten: $v_2 \in Lin(\{v_3\})$ oder $v_3 \in Lin(\{v_2\})$, d.h. es müsste $a \in \mathbb{R}$ geben mit $v_2 = a \cdot v_3$ oder $v_3 = a \cdot v_2$, was offensichtlich nicht möglich ist).

(ii) Ansatz: Löse das Lineare Gleichungssystem

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad I$$

in $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, um eine Darstellung als lineare Hülle zu erhalten. (Gleichung I beinhaltet 3 Variablen, aber nur eine Bedingung. Wir können also 2 Variablen frei wählen). Wähle x_2, x_3 beliebig. Dann ist I äquivalent zu $x_1 = -2x_2 + 3x_3$, d.h.

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 + 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Lin}(\{v_1, v_2\}), \qquad v_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anmerkung: Weniger Vektoren sind nicht möglich, denn dann müsste gelten: $v_1 \in Lin(\{v_2\})$ oder $v_2 \in Lin(\{v_1\})$, d.h. es müsste $a \in \mathbb{R}$ geben mit $v_1 = a \cdot v_2$ oder $v_2 = a \cdot v_1$, was offensichtlich nicht möglich ist).

(iii) Ansatz: Löse das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& x_1 - x_2 \\ 0 &=& x_3 - 2x_2 \end{array} \iff \begin{array}{rcl} x_1 &=& x_2 \\ x_2 &=& \frac{1}{2}x_3 \end{array} \overset{\text{2. Gl in 1. Gl.}}{\iff} \begin{array}{rcll} x_1 &=& \frac{1}{2}x_3 & I \\ x_2 &=& \frac{1}{2}x_3 & II \end{array}$$

in $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, um eine Darstellung als lineare Hülle zu erhalten. (Ziel der obigen Umformungen war, x_1, x_2 jeweils in Abhängigkeit von x_3 darzustellen).
Gleichungen I,II beinhalten 3 Variablen, aber nur 2 (nicht äquivalente) Bedingungen. Wir können also 1 Variable frei wählen. Wähle $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt aus I,II:

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Lin}(\{v_1\}), \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anmerkung: Weniger Vektoren sind nicht möglich, denn dann müsste gelten: $U_2 = \{0\}$, was offensichtlich nicht möglich ist).

(b)
- $v \in U_1$: Zu finden sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = v = a \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{rcl} 1 &=& -2a+4b \\ 4 &=& a+3b \\ 3 &=& 3a-b \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{rclc} 4 &=& a+3b & I \\ 1 &=& -2a+4b & II \\ 3 &=& 3a-b & III \end{array}$$

$$\overset{2\cdot I+II\to II,\,-3\cdot I+III\to III}{\iff} \begin{array}{rclc} 4 &=& a+3b & I \\ 9 &=& 10b & II' \\ -9 &=& -10b & III' \end{array}$$

II, III sind äquivalent, daher muss nur eine der Gleichungen berücksichtigt werden. II liefert $b = \frac{9}{10}$. Einsetzen in I liefert $a = \frac{13}{10}$. Damit ist

$$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = v = \frac{13}{10} \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{9}{10} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

- $v \in U_2$: Zu finden sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = v = a \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{rclc} 1 &=& -2a+3b & I \\ 4 &=& a & II \\ 3 &=& b & III \end{array}$$

II liefert $a = 4$, III liefert $b = 3$. Einsetzen von $a = 4, b = 3$ in I liefert eine wahre Aussage. Damit ist

$$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = v = 4 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15 (Eigenschaften von Untervektorräumen und linearer Hülle, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Sei V ein K-Vektorraum.

(a) Seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

$$U_1 \cup U_2 \text{ ist Untervektorraum von } V \quad \iff \quad U_1 \subset U_2 \text{ oder } U_2 \subset U_1$$

(b) Seien $v_0, v_1, ..., v_r \in V$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Lin}(\{v_0, ..., v_r\}) = \mathrm{Lin}(\{v_0, v_1 - v_0, v_2 - v_0, ..., v_r - v_0\}).$$

(c) Seien $M, M' \subset V$ Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage:

$$\mathrm{Lin}(M) \cap \mathrm{Lin}(M') = \mathrm{Lin}(M \cap M')$$

Lösung: (a) „$\Rightarrow$“: Sei $U_1 \cup U_2$ UVR von V.

Widerspruchsbeweis: Angenommen, weder $U_1 \subset U_2$ noch $U_2 \subset U_1$.

$\Rightarrow$ Es gibt $v \in U_1 \backslash U_2$ und $w \in U_2 \backslash U_1$.

$\Rightarrow v \in U_1 \subset U_1 \cup U_2$, $w \in U_2 \subset U_1 \cup U_2$

$\overset{U_1 \cup U_2 \text{ UVR}}{\Rightarrow} v + w \in U_1 \cup U_2$

Fall 1: $v + w \in U_1 \overset{v \in U_1,\, U_1 \text{ UVR}}{\Rightarrow} w = (v+w) + (-1) \cdot v \in U_1$, Widerspruch zu $w \in U_2 \backslash U_1$!

Fall 2: $v + w \in U_2$ (analog).

„$\Leftarrow$“: Gelte $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Fall 1: $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_1 \cup U_2 = U_2$ ist UVR von V.

Fall 2: $U_2 \subset U_1$ (analog).

(b)
- „$\subset$“: Sei $w \in \mathrm{Lin}(\{v_0, ..., v_r\})$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_0, ..., \lambda_r \in K$ mit $w = \lambda_0 v_0 + ... + \lambda_r v_r$
  $\Rightarrow w = (\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_r) v_0 + \lambda_1 (v_1 - v_0) + ... + \lambda_r (v_r - v_0)$
  $\Rightarrow w \in \mathrm{Lin}(\{v_0, v_1 - v_0, ..., v_r - v_0\})$.
- „$\supset$“: Sei $w \in \mathrm{Lin}(\{v_0, v_1 - v_0, ..., v_r - v_0\})$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_0, ..., \lambda_r \in K$ mit $w = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 (v_1 - v_0) + ... + \lambda_r (v_r - v_0)$
  $\Rightarrow w = (\lambda_0 - \lambda_1 - ... - \lambda_r) v_0 + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$
  $w \in \mathrm{Lin}(\{v_0, ..., v_r\})$

(c) Die Aussage ist falsch.
Wähle zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$, und $M = \{(1,1)\} \subset V$ und $M' = \{(2,2)\} \subset V$. Dann gilt:

- $M \cap M' = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Lin}(M \cap M') = \mathrm{Lin}(\emptyset) = \{0\}$,
- $\mathrm{Lin}(M) = \mathrm{Lin}(\{(1,1)\}) = \mathrm{Lin}(\{2,2)\}) = \mathrm{Lin}(M')$
  $\Rightarrow \mathrm{Lin}(M) \cap \mathrm{Lin}(M') = \mathrm{Lin}(\{(1,1)\}) = \{a \cdot (1,1) : a \in \mathbb{R}\}$,

d.h.
$$\mathrm{Lin}(M) \cap \mathrm{Lin}(M') = \{a \cdot (1,1) : a \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset = \mathrm{Lin}(M \cap M').$$

Aufgabe 16 (Vektorraum der Folgen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).
Wir betrachten den Raum der reellen Folgen
$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}\}.$$
Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definieren wir die Addition und skalare Multiplikation durch
$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ \lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$
womit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum wird, wobei das Nullelement durch die Folge $o := (0)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben ist. Für $D \in \mathbb{N}$ seien
$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n = 0\}, \\ U_2 &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists c_0, ..., c_D \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n = \sum_{k=0}^{D} c_k \cdot n^k\}, \end{aligned}$$
der Raum der abbrechenden Folgen und der polynomialen Folgen vom Grad höchstens D. Zeigen Sie:

(a) U_1 und U_2 sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) Es gibt keine endliche Menge $M \subseteq U_1$, so dass $U_1 = \mathrm{Lin}(M)$.

(c) Geben Sie eine Menge $M \subseteq U_2$ mit $D+1$ Elementen an, so dass $U_2 = \mathrm{Lin}(M)$.

Lösung: (a) Wir prüfen jeweils die Untervektorraum-Eigenschaften:

(i)
- Es gilt $\forall n \geq 1 : o_n = 0$, d.h. $o \in U_1$ (mit $N = 1$) $\Rightarrow U_1 \neq \emptyset$.
- Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_1$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_1 : a_n = 0$, $\forall n \geq N_2 : b_n = 0$.
  Wähle $N := \max\{N_1, N_2\}$.
  $\Rightarrow \forall n \geq N : a_n = 0 = b_n$.
  $\Rightarrow \forall n \geq N : a_n + b_n = 0$
  $\Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_1$.
- Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : a_n = 0$
  $\Rightarrow \forall n \geq N_1 : \lambda \cdot a_n = 0$
  $\Rightarrow (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_1$.

(ii)
- Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : o_n = 0 = \sum_{k=0}^{D} 0 \cdot n^k$, d.h. $o \in U_3 \Rightarrow U_3 \neq \emptyset$.
- Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_3$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $c_0, ..., c_D \in \mathbb{R}$, $c_0', ..., c_D' \in \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \sum_{k=0}^{D} c_k \cdot n^k$, $b_n = \sum_{k=0}^{D} c_k' \cdot n^k$.
  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n + b_n = \sum_{k=0}^{D} c_k \cdot n^k + \sum_{k=0}^{D} c_k' \cdot n^k = \sum_{k=0}^{D} (c_k + c_k') \cdot n^k$
  $\Rightarrow (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_3$.
- Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $c_0, ..., c_D \in \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \sum_{k=0}^{D} c_k \cdot n^k$.
  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \lambda \cdot a_n = \sum_{k=0}^{D} (\lambda \cdot c_k) \cdot n^k$.
  $\Rightarrow (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_3$.

(b) Angenommen es gäbe eine endliche Menge $M = \{a^{(1)}, ..., a^{(r)}\} \subset U_1$ mit $U_1 = \mathrm{Lin}(M)$.
$\Rightarrow$ Es gibt $N_1, ..., N_r \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_i : a_n^{(i)} = 0$ $(i = 1, ..., r)$.
Wähle $N := \max\{N_1, ..., N_r\} + 1$. Definiere $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \begin{cases} 1, & n \leq N - 1 = \max\{N_1, ..., N_r\}, \\ 0, & n \geq N. \end{cases}$$

Dann gilt $\forall n \geq N : a_n = 0$, d.h. $a \in U_1$. Es gilt aber nicht $a \in \mathrm{Lin}(M)$, denn:
Angenommen, $a \in \mathrm{Lin}(M)$
$\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $a = \lambda_1 a^{(1)} + ... + \lambda_r a^{(r)}$.
$\Rightarrow 1 = a_{N-1} = \lambda_1 a_{N-1}^{(1)} + ... + \lambda_r a_{N-1}^{(r)} = \lambda_1 \cdot 0 + ... + \lambda_r \cdot 0 = 0$, Widerspruch!

(c) Definiere Folgen $a^{(k)} = (a_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n^{(0)} := 1$, $a_n^{(k)} := 1 \cdot n^k$ $(k = 1, ..., D)$, und setze $M = \{a^{(0)}, ..., a^{(D)}\}$ (offensichtlich gilt $M \subset U_3$).
Wir zeigen, dass $\mathrm{Lin}(M) = U_3$.
„$\subseteq$“: Dies folgt aus $M \subset U_3$ und Satz aus VL (4.14(b)).
„$\supseteq$“: Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_3$ beliebig.
$\Rightarrow$ Es gibt $c_0, ..., c_D \in \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \sum_{k=0}^{D} c_k \cdot n^k \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^{D} c_k \cdot a_n^{(k)}$
$\Rightarrow a = \sum_{k=0}^{D} c_k \cdot a^{(k)}$
$\Rightarrow a \in \mathrm{Lin}(U_3)$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **15. November 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`