UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

4. Abgabeblatt

Aufgabe 13	Aufgabe 14	Aufgabe 15	Aufgabe 16	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 13 (Beispiele / Gegenbeispiele für (Unter-)Vektorräume, 4 = 2 + 2 Punkte).

Beantworten Sie die folgenden Fragen entweder durch einen Nachweis oder durch Angabe der verletzten Eigenschaft mit einem expliziten Gegenbeispiel:

(a) Sind die folgenden Mengen Untervektorräume des Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ (mit komponentenweiser Multiplikation und Addition)?

(i) $U_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y = 0 \text{ oder } 3y + 4z = 0\}$,

(ii) $U_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y + z = 5\}$,

(iii) $U_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$,

(iv) $U_4 := \{(2\lambda, \lambda, \lambda^2) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(b) Sind die folgenden Strukturen $(V, +_V)$ Vektorräume über dem jeweils angegebenen Körper K und der angegebenen skalaren Multiplikation $\cdot_V$? Hierbei bezeichnen „+“ stets die normale (bzw. komponentenweise) Addition und „$\cdot$“ die normale Multiplikation.

(i) $(V, +_V) = (\mathbb{Z}, +)$ über $K = F_5$ mit $\cdot_V : F_5 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a, z) \mapsto a \cdot z$,

(ii) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{R}$ mit $\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (a \cdot x, 0)$,

(iii) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{R}$ mit $\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (a^2 \cdot x, a^2 \cdot y)$,

(iv) $(V, +_V) = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ über $K = \mathbb{R}$ mit $\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, (a, x) \mapsto x^a$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis nutzen, dass $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ *eine abelsche Gruppe bildet.*

Aufgabe 14 (Rechnen im Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$, 4 = 2 + 2 Punkte).

Wir betrachten den Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ mit der üblichen komponentenweisen Addition und Multiplikation. Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ werden hier als Spalten anstelle von Zeilen dargestellt.

(a) Schreiben Sie die folgenden Untervektorräume U_i $(i = 1, 2, 3)$ des $\mathbb{R}^3$ als lineare Hülle von möglichst wenig Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
U_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \right\} \\
U_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : x_1 - x_2 = 0, x_3 - 2x_2 = 0 \right\}
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in U_1 und U_2 liegt, indem Sie ihn als Linearkombination der Vektoren der in (a) bestimmten linearen Hüllen darstellen.

Aufgabe 15 (Eigenschaften von Untervektorräumen und linearer Hülle, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Sei V ein K-Vektorraum.

(a) Seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

$$U_1 \cup U_2 \text{ ist Untervektorraum von } V \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 \subset U_2 \text{ oder } U_2 \subset U_1$$

(b) Seien $v_0, v_1, ..., v_r \in V$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Lin}(\{v_0, ..., v_r\}) = \mathrm{Lin}(\{v_0, v_1 - v_0, v_2 - v_0, ..., v_r - v_0\}).$$

(c) Seien $M, M' \subset V$ Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage:

$$\mathrm{Lin}(M) \cap \mathrm{Lin}(M') = \mathrm{Lin}(M \cap M')$$

Aufgabe 16 (Vektorraum der Folgen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Wir betrachten den Raum der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definieren wir die Addition und skalare Multiplikation durch

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}},
\end{aligned}$$

womit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum wird, wobei das Nullelement durch die Folge $o := (0)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben ist. Für $D \in \mathbb{N}$ seien

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n = 0\}, \\
U_2 &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists c_0, ..., c_D \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n = \sum_{k=0}^{D} c_k \cdot n^k\},
\end{aligned}$$

der Raum der abbrechenden Folgen und der polynomialen Folgen vom Grad höchstens D. Zeigen Sie:

(a) U_1 und U_2 sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) Es gibt keine endliche Menge $M \subseteq U_1$, so dass $U_1 = \mathrm{Lin}(M)$.

(c) Geben Sie eine Menge $M \subseteq U_2$ mit $D + 1$ Elementen an, so dass $U_2 = \mathrm{Lin}(M)$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **15. November 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`