UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

**Lineare Algebra 1**
**Prof. Dr. R. Dahlhaus**
**Dr. S. Richter, N. Phandoidaen**
**Wintersemester 2018/2019**

## 3. Abgabeblatt

| Aufgabe 9 | Aufgabe 10 | Aufgabe 11 | Aufgabe 12 | Summe: |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

**Aufgabe 9 (Beispiele für Ringe und Körper, 2 + 1 + 1 Punkte).**
Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir die Verknüpfungen $\oplus, \odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch

$$a \oplus b := a + b - 1, \qquad a \odot b := a + b - a \cdot b.$$

Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ist kommutativer Ring mit 1.

(b) $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ist nullteilerfrei, aber kein Körper.

(c) $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ ist ein Körper.
*Hinweis: Die Verknüpfungen $\oplus$, $\odot$ werden wie oben angegeben auch auf $\mathbb{Q}$ definiert. Sie dürfen bereits nutzen, dass $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.*

**Aufgabe 10 (Beispiele / Gegenbeispiele für Ringe, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).**
Gegeben seien die folgenden Strukturen:

(i) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$, wobei $2\mathbb{Z} := \{2 \cdot z : z \in \mathbb{Z}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

(ii) $(S, \oplus, \circ)$, wobei $S := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}$ und für $f, g \in S$ die Abbildung $f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wird durch

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x).$$

(iii) $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$, wobei

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \qquad (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2).$$

Stellen Sie jeweils fest, ob die folgenden Aussagen für die obigen Strukturen $(R, +, \cdot)$ gelten und antworten Sie mit wahr/falsch. Geben Sie im Falle von 'Wahr' *nur* die geforderten Größen an (keine weiteren Nachweise) und im Falle von 'Falsch' ein explizites Gegenbeispiel.

(a) $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring.
*Geben Sie das neutrale Element bzgl. Addition und das inverse Element bzgl. Addition für ein beliebiges $x \in R$ an.*

(b) $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring mit 1.
*Geben Sie das Einselement an.*

(c) $(R, +, \cdot)$ ist ein nullteilerfreier Ring.

**Aufgabe 11 (Eigenschaften von $F_m$, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).**
Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Wie in der Vorlesung eingeführt gibt es für jedes $a \in \mathbb{Z}$ Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $r \in \{0, ..., m-1\}$ so dass $a = q \cdot m + r$, und man definiert $r_m(a) := r$.

Es sei $(F_m, +_m, \cdot_m)$ wie in der Vorlesung eingeführt, das heißt $F_m = \{0, ..., m-1\}$ und die Verknüpfungen sind durch

$$a +_m b := r_m(a+b), \qquad a \cdot_m b := r_m(a \cdot b),$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$r_m(r_m(a) \cdot b) = r_m(a \cdot b) = r_m(a \cdot r_m(b)) = r_m(r_m(a) \cdot r_m(b)).$$

(b) $\cdot_m$ ist assoziativ.

(c) $(F_m, +_m, \cdot_m)$ erfüllt die Distributivgesetze. Es wird nur der Nachweis eines Distributivgesetzes verlangt.

(d) $(F_m, +_m, \cdot_m)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

*Hinweis: Sie dürfen für alle Aufgaben die Resultate aus Aufgabe P11 nutzen. Für (a) ist P11(a) hilfreich; für (c) die Resultate von (a) und P11(b); für (d) nutzen Sie P11(c).*

**Aufgabe 12 (Rechnen in $F_m$, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).**
Für $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ sei $F_m = \{0, ..., m-1\}$ wie in der Vorlesung eingeführt. Im Folgenden schreiben wir kurz $+$ für $+_m$ und $\cdot$ für $\cdot_m$. Für $x \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^m := \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{m\text{-mal}}.$$

(a) Berechnen Sie in $F_5$ die Ausdrücke

$$3 \cdot (4 + 2^{-1}), \qquad 3^{12345} \quad \text{und} \quad 2^p,$$

wobei $p = 7^{73}$.

(b) Sei $m \in \{5, 7\}$. Geben Sie alle $x \in F_m$ an, welche die Gleichung $x^3 = 1$ lösen.

(c) Finden Sie drei verschiedene Paare $(x, y)$ mit $x, y \in F_9 \backslash \{0\}$, so dass $x \cdot y = 0$.

---

**Abgabe:**
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **8. November 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

**Homepage der Vorlesung:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`