Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

2. Abgabeblatt - Lösungen

Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):
Namen:

Aufgabe 5 (Beispiele und Gegenbeispiele für Gruppen, $4 = 2 + 2$ Punkte).
Wir bezeichnen mit „$\cdot$“ (bzw. „$-$“) die gewöhnliche Multiplikation (bzw. Subtraktion).

(a) Gegeben seien die folgenden Mengen und Verknüpfungen:

(i) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup)$
(ii) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
(iii) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \cdot)$
(iv) $(\mathbb{Z}, -)$

Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um eine Gruppe handelt oder nicht.
Hinweis: Im Falle, dass es sich um keine Gruppe handelt, wird die Angabe mindestens einer verletzten Eigenschaft erwartet zusammen mit einem expliziten Gegenbeispiel. Im Falle, dass es sich um eine Gruppe handelt, wird hier nur die Antwort „Dies ist eine Gruppe“ erwartet, Sie müssen nicht die gesamte Definition nachrechnen.

(b) Sei $\mathbb{R}_{>1} := \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$. Wir definieren die Verknüpfung

$$* : \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>1}, \quad (x, y) \mapsto x * y := x \cdot y - x - y + 2.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}_{>1}, *)$ eine abelsche Gruppe ist.
Hinweis: Erwartet wird der Nachweis der Gruppeneigenschaften, die Angabe des neutralen Elements und des inversen Elements zu einem beliebigen $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Genutzt werden dürfen ohne Begründung die normalen Rechenregeln in $\mathbb{R}$ für „$+$“, „$-$“ und „$\cdot$“.

Lösung:

(a) (i) Die leere Menge ist $\emptyset$ das neutrale Element (denn für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gilt $A \cup \emptyset = A = \emptyset \cup A$). Es fehlen aber inverse Elemente. Angenommen $A = \{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ besäße ein inverses Element A'. Dann gälte $A \cup A' = \emptyset$. Aber dann wäre bereits $A = A' = \emptyset$, Widerspruch.

(ii) Gruppe

(iii) Verknüpfung nicht abgeschlossen ($\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), kein neutrales Element ($1 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

(iv) Nicht assoziativ $(2-(3-1)=0 \neq -2=(2-3)-1)$

(b) Wir müssen die Axiome einer Gruppe überprüfen.

1) **Abgeschlossenheit** der Verknüpfung: Sei $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann gilt

$$x>1 \overset{y-1>0}{\Longrightarrow} x(y-1)>y-1 \Longrightarrow xy-x-y+2>1.$$

Damit ist $x * y \in \mathbb{R}_{>1}$.

2) **Assoziativität**: Wir nutzen aus, dass die gewöhnliche Multiplikation/Addition auf $\mathbb{R}$ assoziativ ist. Damit erhalten wir für $x, y, z \in \mathbb{R}_{>1}$:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (xy-x-y+2)z-(xy-x-y+2)-z+2 \\ &= xyz-xz-yz-xy+z+x+y+(-2+2) \\ &= x(yz-y-z+2)-x-(yz-y-z+2)+2 \\ &= x *(y * z)\end{aligned}$$

Also gilt Assoziativität.

3) **Neutrales Element**: Da $1<2 \in \mathbb{R}_{>1}$ und für beliebiges $x \in \mathbb{R}_{>1}$,

$$2 * x=2 \cdot x-x-2+2=x=x \cdot 2-2-x+2=x * 2,$$

ist 2 das neutrale Element in $(\mathbb{R}_{>1}, *)$.

4) **Inverse Elemente**: Wir behaupten, dass das inverse Element zu $x \in \mathbb{R}_{>1}$ über $x' := \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R}_{>1}$ gegeben ist. Beweis:

- Es ist $x>x-1>0 \Rightarrow x'=\frac{x}{x-1}>1$, d.h. $x' \in \mathbb{R}_{>1}$.
- Die Inverseneigenschaft wird erfüllt:

$$\begin{aligned}x' * x &= \frac{x}{x-1} * x=\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x-1}-x+2=\frac{x^2-x-x \cdot(x-1)}{x-1}+2=2, \\ x * x' &= x * \frac{x}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x-1}-x+2=\frac{x^2-x-x \cdot(x-1)}{x-1}+2=2\end{aligned}$$

5) **Kommutativität**: Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann gilt

$$x * y=xy-x-y+2=yx-y-x+2=y * x.$$

Aufgabe 6 (Permutationen, 4 = 1 + 3 Punkte).
Gegeben seien folgende Permutationen in $(S_7, \circ)$:

$$\sigma:=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau:=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 4\end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie σ und τ in der Zykelschreibweise dar.

(b) Bestimmen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} und τ^{-1} in $(S_7, \circ)$ in Zykel- und Permutationsschreibweise.

Hinweis: Es werden jeweils nur die Endergebnisse erwartet.

Lösung:

(a) $\sigma=(176)(253)(4)$, $\tau=(16743)(25)$

(b)

- $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2374)(5)(6)$
- $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1435)(2)(6)(7)$
- $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (167)(235)(4)$
- $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (13476)(25)$

Aufgabe 7 (Gruppenhomomorphismen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und e_G ihr neutrales Element.

(a) Sei ein Element $g \in G$ fest gewählt. Wir betrachten folgende Abbildungen:

(i) $\varphi_1 : G \to G, x \mapsto x'$

(ii) $\varphi_2 : G \to G, x \mapsto g * x$

(iii) $\varphi_3 : G \to G, x \mapsto e_G$

Untersuchen Sie φ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf Bijektivität. Handelt es sich dabei um Gruppenhomomorphismen oder sogar um Gruppenisomorphismen?
Hinweis: Für jede zutreffende Eigenschaft wird ein Beweis erwartet. Hierbei müssen Sie die einzelnen Schritte (Anwendung Assoziativität etc.) nicht detailliert ausführen! Falls eine Eigenschaft nicht zutrifft, so wird ein Gegenbeispiel mit einer expliziten Gruppe G (und explizitem $g \in G$) erwartet. Nutzen Sie dafür zum Beispiel folgende Gruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(S_3, \circ)$.

Betrachten Sie nun die Gruppe $(\mathbb{R}_{>1}, *)$ aus Aufgabe 5.

(b) Nutzen Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>1}, x \mapsto x + 1$ um zu zeigen, dass

$$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \cong (\mathbb{R}_{>1}, *).$$

Hinweis: Erwartet wird ein Beweis, dass φ ein Gruppenisomorphismus ist.

Lösung:

(a) (i)

- φ_1 ist injektiv, denn:
  Seien $x, y \in G$ mit $x' = \varphi_1(x) = \varphi_1(y) = y'$.
  $\Rightarrow y = e_G * y = x * x' * y = x * y' * y = x * e_G = x$.
- φ_1 ist surjektiv, denn: Für $y \in G$ wähle $x := y'$, dann gilt: $\varphi_1(x) = x' = (y')' = y$ (vgl. Vorlesung).
- Damit ist φ_1 bijektiv.
  Alternativ kann die Bijektivität auch direkt gezeigt werden, indem eine Umkehrabbildung angegeben wird (vgl. Bemerkung am Ende des 1. Kapitels): φ_1 ist selbst die Umkehrabbildung von φ_1, denn für beliebiges $x \in G$ gilt:

  $$(\varphi_1 \circ \varphi_1)(x) = \varphi_1(\varphi_1(x)) = \varphi_1(x^{-1}) = (x')' = x = \mathrm{id}_G(x),$$

  d.h. $\varphi_1 \circ \varphi_1 = \mathrm{id}_G$.

- φ_1 ist im Allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus.

  (Idee: Falls die Gruppe nicht abelsch ist, gilt nicht $y' * x' = (x * y)' = \varphi(x * y)$, aber $\varphi(x) * \varphi(y) = x' * y'$).

  Konkretes Gegenbeispiel: $(G, *) = (S_3, \circ)$. Wähle $x := (123)$, $y = (12)$. Dann gilt $x \circ y = (13)$, d.h. $\varphi_1(x \circ y) = (13)^{-1} = (13)$, aber $\varphi_1(x) \circ \varphi_1(y) = (123)^{-1} \circ (12)^{-1} = (132) \circ (12) = (23)$.

(ii)
- φ_2 ist injektiv, denn: Seien $x, y \in G$ mit $g * x = \varphi_2(x) = \varphi_2(y) = g * y$.
  $\Rightarrow x = g' * (g * x) = g' * (g * y) = y$.
- φ_2 ist surjektiv, denn: Für $y \in G$ wähle $x := g' * y$. Dann gilt $\varphi_2(x) = g * (g' * y) = y$.
- Damit ist φ_2 bijektiv.
  Alternativ kann die Bijektivität auch direkt gezeigt werden, indem eine Umkehrabbildung angegeben wird (vgl. Bemerkung am Ende des 1. Kapitels): Definiere $\psi : G \to G, x \mapsto g' * x$. Dann gilt für beliebiges $x \in G$:

  $$(\varphi_2 \circ \psi)(x) = \varphi_2(\psi(x)) = \varphi_2(g' * x) = g * (g' * x) = x = \mathrm{id}_G(x),$$

  d.h. $\varphi_2 \circ \psi = \mathrm{id}_G$.
  Außerdem gilt für beliebiges $x \in G$:

  $$(\psi \circ \varphi_2)(x) = \psi(\varphi_2(x)) = \psi(g * x) = g' * (g * x) = x = \mathrm{id}_G(x)$$

  , d.h. $\psi \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_G$.
- φ_2 ist im Allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus.

  (Formal: Es gilt $\varphi_2(x * y) = g * (x * y)$, aber $\varphi_2(x) * \varphi_2(y) = (g * x) * (g * y)$, d.h. auf der rechten Seite ist „ein g zuviel“, wir erwarten grundsätzlich andere Ergebnisse.)

  Konkretes Gegenbeispiel: Wähle $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ und $g = 2$, $x = y = 3$. Dann gilt $\varphi_2(x + y) = \varphi_2(6) = 2 + 6 = 8$, aber $\varphi_2(x) + \varphi_2(y) = (2 + 3) + (2 + 3) = 10$.

(iii)
- φ_3 ist nicht injektiv. Konkretes Gegenbeispiel: Wähle $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ mit $e_G = 0$. Wähle $x = 1$, $y = 2$. Dann gilt $\varphi_3(x) = 0 = \varphi_3(y)$, aber $x \neq y$.
- φ_3 ist nicht surjektiv. Konkretes Gegenbeispiel: Wähle $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ mit $e_G = 0$. Dann gibt es kein $x \in G$ mit $\varphi_3(x) = 1 \in G$, denn $\varphi_3(x) = 0$.
- φ_3 ist ein Gruppenhomomorphismus, denn: Seien $x, y \in G$ beliebig. Dann ist $\varphi_3(x * y) = e_G = e_G * e_G = \varphi_3(x) * \varphi_3(y)$.

(b)
- φ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn: Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Dann gilt:

  $$\varphi(x \cdot y) = x \cdot y + 1,$$

  und

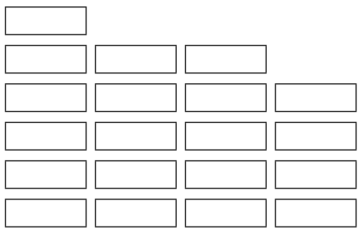
  $$\begin{aligned} \varphi(x) * \varphi(y) &= (x+1) * (y+1) = (x+1) \cdot (y+1) - (x+1) - (y+1) + 2 \\ &= x \cdot y + x + y + 1 - (x+1) - (y+1) + 2 \\ &= x \cdot y + 1, \end{aligned}$$

  d.h. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.

- φ ist bijektiv, denn: Definiere $\psi : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto x - 1$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$:
$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(x+1) = (x+1) - 1 = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}(x),$$
d.h. $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$. Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>1}$:
$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi(x-1) = (x-1) + 1 = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>1}}(x),$$
d.h. $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>1}}$.
Damit ist ψ Umkehrabbildung von φ. Mit der Bemerkung am Ende von Kapitel 1 folgt: φ ist bijektiv.
- Damit ist φ Gruppenisomorphismus, d.h. $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \cong (\mathbb{R}_{>1}, *)$.

Aufgabe 8 (Beweise mit Gruppen und Gruppenhomomorphismen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G.

(a) Zeigen Sie: Gilt $\forall a \in G : a * a = e_G$, so ist G bereits abelsch.
Hinweis: Erwartet wird hier ein Beweis unter detaillierter Angabe der verwendeten Gruppeneigenschaften. Ein möglicher Weg (dem Sie nicht folgen müssen) ist, das folgende Beweisgerüst mit den unten angegebenen Blöcken zu vervollständigen:



$\boxed{\overset{\text{neutr.Elem.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Vorauss.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Vorauss.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{neutr.Elem.}}{=}}$

$\boxed{\text{Seien } a, b \in G \text{ beliebig}}$ $\boxed{a * \big[\big(a * ((b * a) * b)\big) * b\big]}$ $\boxed{a * \big[a * \big((b * a) * (b * b)\big)\big]}$

$\boxed{a * b}$ $\boxed{a * \big[\big(a * (b * (a * b))\big) * b\big]}$ $\boxed{\Rightarrow b * a}$ $\boxed{a * [e_G * b]}$ $\boxed{(a * a) * ((b * a) * (b * b))}$

$\boxed{a * \big[\big((a * b) * (a * b)\big) * b\big]}$ $\boxed{e_G * ((b * a) * e_G)}$ $\boxed{a * \big[a * \big(((b * a) * b) * b\big)\big]}$

Sei nun $(H, \circledast)$ eine weitere Gruppe mit neutralem Element e_H. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Zeigen Sie:
$$\varphi \text{ ist injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi^{-1}(\{e_H\}) = \{e_G\}.$$
Hinweis: Erwartet wird ein Beweis der Aussage.

Lösung:

(a) Seien $a, b \in G$ beliebig.

Möglichkeit 1: Gleichungskette

$$\begin{aligned}
b * a &\overset{\text{neutr.Elem.}}{=} e_G * ((b * a) * e_G) \\
&\overset{\text{Vorauss.}}{=} (a * a) * ((b * a) * (b * b)) \\
&\overset{\text{Ass.Ges.}}{=} a * \left[a * \big((b * a) * (b * b)\big)\right] \\
&\overset{\text{Ass.Ges.}}{=} a * \left[a * \big(((b * a) * b) * b\big)\right] \\
&\overset{\text{Ass.Ges.}}{=} a * \left[\big(a * ((b * a) * b)\big) * b\right] \\
&\overset{\text{Ass.Ges.}}{=} a * \left[\big(a * (b * (a * b))\big) * b\right] \\
&\overset{\text{Ass.Ges.}}{=} a * \left[\big((a * b) * (a * b)\big) * b\right] \\
&\overset{\text{Vorauss.}}{=} a * [e_G * b] \\
&\overset{\text{neutr.Elem.}}{=} a * b.
\end{aligned}$$

Möglichkeit 2: Implikationen

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} (a * b) * (a * b) = e_G \\
&\overset{a*|}{\Longrightarrow} a * ((a * b) * (a * b)) = a * e_G. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned}
a * ((a * b) * (a * b)) &\overset{\text{Ass.Ges.}}{=} (a * (a * b)) * (a * b) \overset{\text{Ass.Ges.}}{=} ((a * a) * b) * (a * b) \\
&\overset{\text{Vorauss.}}{=} (e_G * b) * (a * b) \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} b * (a * b)
\end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$a * e_G \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} a.$$

Einsetzen in (1):

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow b * (a * b) = a \\
&\overset{|*b}{\Rightarrow} (b * (a * b)) * b = a * b \qquad (2)
\end{aligned}$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned}
(b * (a * b)) * b &\overset{\text{Ass.Ges.}}{=} b * ((a * b) * b) \overset{\text{Ass.Ges.}}{=} b * ((a * (b * b)) \\
&\overset{\text{Vorauss.}}{=} b * (a * e_G) \overset{\text{neutr.Elem.}}{=} b * a.
\end{aligned}$$

Einsetzen in (2) liefert nun $b * a = a * b$.

(b) „$\Rightarrow$“ Zu zeigen ist eine Gleichheit von Mengen.

„$\varphi^{-1}(\{e_H\}) \supseteq \{e_G\}$“: Es gilt laut Vorlesung $\varphi(e_G) = e_H$. Damit ist $e_G \in \varphi^{-1}(\{e_H\})$.

„$\varphi^{-1}(\{e_H\}) \subseteq \{e_G\}$“:

Sei $x \in \varphi^{-1}(\{e_H\})$.

$\Longrightarrow \varphi(x) = e_H$

$\overset{\varphi(e_G)=e_H}{\Longrightarrow} \varphi(x) = e_H = \varphi(e_G)$

$\overset{\varphi \text{ inj.}}{\Longrightarrow} x = e_G$, d.h. $x \in \{e_G\}$

„$\Leftarrow$“ Seien $x, y \in G$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$.

$\Longrightarrow \varphi(x * y') = \varphi(x) \circledast \varphi(y') = \varphi(x) \circledast \varphi(y)' \overset{\varphi(x)=\varphi(y)}{=} \varphi(y) \circledast \varphi(y)' = e_H.$

$\Longrightarrow x * y' \in \varphi^{-1}(\{e_H\})$

$\overset{\varphi^{-1}(\{e_H\})=\{e_G\}}{\Longrightarrow} x * y' = e_G$

$\Longrightarrow x = (x * y') * y = e_G * y = y$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Mittwoch, den **31. Oktober 2018, 18:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`