UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

2. Abgabeblatt

Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 5 (Beispiele und Gegenbeispiele für Gruppen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Wir bezeichnen mit „$\cdot$“ (bzw. „$-$“) die gewöhnliche Multiplikation (bzw. Subtraktion).

(a) Gegeben seien die folgenden Mengen und Verknüpfungen:

(i) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup)$

(ii) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

(iii) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \cdot)$

(iv) $(\mathbb{Z}, -)$

Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um eine Gruppe handelt oder nicht.
Hinweis: Im Falle, dass es sich um keine Gruppe handelt, wird die Angabe mindestens einer verletzten Eigenschaft erwartet zusammen mit einem expliziten Gegenbeispiel. Im Falle, dass es sich um eine Gruppe handelt, wird hier nur die Antwort „Dies ist eine Gruppe“ erwartet, Sie müssen nicht die gesamte Definition nachrechnen.

(b) Sei $\mathbb{R}_{>1} := \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$. Wir definieren die Verknüpfung

$$* : \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>1}, \quad (x, y) \mapsto x * y := x \cdot y - x - y + 2.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}_{>1}, *)$ eine abelsche Gruppe ist.
Hinweis: Erwartet wird der Nachweis der Gruppeneigenschaften, die Angabe des neutralen Elements und des inversen Elements zu einem beliebigen $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Genutzt werden dürfen ohne Begründung die normalen Rechenregeln in $\mathbb{R}$ für „$+$“, „$-$“ und „$\cdot$“.

Aufgabe 6 (Permutationen, 4 = 1 + 3 Punkte).
Gegeben seien folgende Permutationen in $(S_7, \circ)$:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie σ und τ in der Zykelschreibweise dar.

(b) Bestimmen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} und τ^{-1} in $(S_7, \circ)$ in Zykel- und Permutationsschreibweise.

Hinweis: Es werden jeweils nur die Endergebnisse erwartet.

Aufgabe 7 (Gruppenhomomorphismen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und e_G ihr neutrales Element.

(a) Sei ein Element $g \in G$ fest gewählt. Wir betrachten folgende Abbildungen:

(i) $\varphi_1 : G \to G, x \mapsto x'$

(ii) $\varphi_2 : G \to G, x \mapsto g * x$

(iii) $\varphi_3 : G \to G, x \mapsto e_G$

Untersuchen Sie φ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf Bijektivität. Handelt es sich dabei um Gruppenhomomorphismen oder sogar um Gruppenisomorphismen?
Hinweis: Für jede zutreffende Eigenschaft wird ein Beweis erwartet. Hierbei müssen Sie die einzelnen Schritte (Anwendung Assoziativität etc.) nicht detailliert ausführen! Falls eine Eigenschaft nicht zutrifft, so wird ein Gegenbeispiel mit einer expliziten Gruppe G (und explizitem $g \in G$) erwartet. Nutzen Sie dafür zum Beispiel folgende Gruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(S_3, \circ)$.

Betrachten Sie nun die Gruppe $(\mathbb{R}_{>1}, *)$ aus Aufgabe 5.

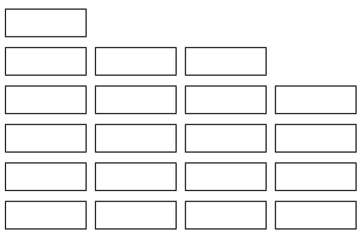
(b) Nutzen Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>1}, x \mapsto x + 1$ um zu zeigen, dass

$$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \cong (\mathbb{R}_{>1}, *).$$

Hinweis: Erwartet wird ein Beweis, dass φ ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 8 (Beweise mit Gruppen und Gruppenhomomorphismen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G.

(a) Zeigen Sie: Gilt $\forall a \in G : a * a = e_G$, so ist G bereits abelsch.
Hinweis: Erwartet wird hier ein Beweis unter detaillierter Angabe der verwendeten Gruppeneigenschaften. Ein möglicher Weg (dem Sie nicht folgen müssen) ist, das folgende Beweisgerüst mit den unten angegebenen Blöcken zu vervollständigen:



$\boxed{\overset{\text{neutr.Elem.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Ass.Ges.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Vorauss.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{Vorauss.}}{=}}$ $\boxed{\overset{\text{neutr.Elem.}}{=}}$

$\boxed{\text{Seien } a, b \in G \text{ beliebig}}$ $\boxed{a * \big[\big(a * ((b * a) * b)\big) * b\big]}$ $\boxed{a * \big[a * \big((b * a) * (b * b)\big)\big]}$

$\boxed{a * b}$ $\boxed{a * \big[\big(a * (b * (a * b))\big) * b\big]}$ $\boxed{\Rightarrow b * a}$ $\boxed{a * [e_G * b]}$ $\boxed{(a * a) * ((b * a) * (b * b))}$

$\boxed{a * \big[\big((a * b) * (a * b)\big) * b\big]}$ $\boxed{e_G * ((b * a) * e_G)}$ $\boxed{a * \big[a * \big(((b * a) * b) * b\big)\big]}$

Sei nun $(H, \circledast)$ eine weitere Gruppe mit neutralem Element e_H. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ ist injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi^{-1}(\{e_H\}) = \{e_G\}.$$

Hinweis: Erwartet wird ein Beweis der Aussage.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Mittwoch, den **31. Oktober 2018, 18:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`