Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

1. Abgabeblatt - Lösungen

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 1 (Mengenlehre, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) Gegeben seien die Mengen $X = \{4, 6, 8\}$, $Y = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x \leq 9\}$, $Z = \{x \in \mathbb{N} : x > 6\}$. Geben Sie die folgenden Mengen an:

(i) $\mathcal{P}(X)$,

(ii) $X \cup Y$, $Y \cap Z$, $Y \setminus X$ und $Z \setminus Y$,

(iii) $(Y \cap Z) \times (X \cap Y)$.

Hinweis: Erwartet wird hier die vollständig vereinfachte Angabe der gesuchten Mengen in elementweiser Aufzählung oder der Form $\{x \in \mathbb{N} : ...\}$, keine Herleitung!

(b) Es seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie:

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

Hinweis: Erwartet wird hier ein direkter Beweis der Aussage mittels Implikationen „$\Rightarrow$“ oder Äquivalenzen „$\Leftrightarrow$“.
Sie dürfen ohne Beweis die folgenden Regeln aus der Aussagenlogik verwenden: Für Aussagen a,b,c gilt:

- *De Morgan'sche Regel:* „nicht(a und b)“ $\Leftrightarrow$ „nicht(a) oder nicht(b)“
- *Distributivgesetz:* „(a oder b) und c “ $\Leftrightarrow$ „(a und c) oder (b und c)“

Lösung:

(a) Es ist $Y = \{6, 7, 8, 9\}$. Damit:

(i) $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}, \{4, 6, 8\}\}$

(ii) $X \cup Y = \{4, 6, 7, 8, 9\}$,
$Y \cap Z = \{7, 8, 9\}$,
$Y \setminus X = \{7, 9\}$,
$Z \setminus Y = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 10\}$,

(iii) $(Y \cap Z) \times (X \cap Y) = \{7, 8, 9\} \times \{6, 8\} = \{(7, 6), (7, 8), (8, 6), (8, 8), (9, 6), (9, 8)\}$

(b) Wir müssen die folgenden Inklusionen zeigen:

$$C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \text{ und } C \setminus (A \cap B) \supseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

(1) „$\subseteq$“ Sei $x \in C \setminus (A \cap B)$.
$\Rightarrow x \in C$ und $x \notin A \cap B$ (per Definition) $\overset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow}$ $x \in C$ und ($x \notin A$ oder $x \notin B$)
$\overset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow}$ ($x \in C$ und $x \notin A$) oder ($x \in C$ und $x \notin B$)
$\Rightarrow x \in C \setminus A$ oder $x \in C \setminus B$
$\Rightarrow x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
$\Rightarrow C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

(2) „$\supseteq$“ Sei $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
$\Rightarrow x \in C \setminus A$ oder $x \in C \setminus B$ (per Definition)
$\Rightarrow$ ($x \in C$ und $x \notin A$) oder ($x \in C$ und $x \notin B$)
$\overset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow}$ $x \in C$ und ($x \notin A$ oder $x \notin B$)
$\overset{Hinweis}{\Rightarrow}$ $x \in C$ und $x \notin A \cap B$
$\Rightarrow x \in C \setminus (A \cap B)$
$\Rightarrow C \setminus (A \cap B) \supseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Bemerkung: Im zweiten Teil des Beweises sind wir einfach nur den ersten Weg „zurück gelaufen“. Man hätte hier die Implikationspfeile („$\Rightarrow$“) größtenteils durch Äquivalenzpfeile („$\Leftrightarrow$“) ersetzen können, so dass man sich den zweiten Teil des Beweises hätte sparen können.

Aufgabe 2 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Die Abbildungen $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien gegeben durch:

$$f(n) := n + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$
$$g(1) := 1 \text{ und } g(n) := n - 1 \text{ für alle } n \geq 2,$$
$$h(n) := \begin{cases} n + 1 & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N} \\ n - 1 & \text{für gerades } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild von der Menge $X = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ unter f und die Urbilder der Mengen $\{11, 12\} \subseteq \mathbb{N}$ und $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$ unter der Abbildung h.
Hinweis: Erwartet wird hier nur die formal korrekte elementweise Angabe der gesuchten Mengen, keine Herleitung!

(b) Untersuchen Sie, ob f, g und h jeweils injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv sind.
Hinweis: Falls die jeweilige Eigenschaft verletzt ist, wird die Angabe eines Gegenbeispiels mit expliziten Zahlen erwartet. Falls die Eigenschaft erfüllt ist, so muss die Definition nachgerechnet werden. Beispiel surjektiv: Geben sie dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ (in Abhängigkeit von n) an, so dass $f(m) = n$.

(c) Bestimmen Sie die Kompositionen $f \circ g$ und $h \circ f$.
Hinweis: Erwartet wird hier die Angabe der jeweils vollständig vereinfachten Abbildung unter Angabe der Zwischenschritte!

Lösung:

(a) Da die Menge X nur endlich viele Elemente enthält, können wir folgende Wertetabelle erstellen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

und

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h(x)$	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11

Daraus können wir die gesuchten Mengen ablesen:

- $f(X) = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
- $h^{-1}(\{11, 12\}) = \{11, 12\}$
- $h^{-1}(\{1\}) = \{2\}$

(b) Mit Hilfe der Wertetabelle aus Teilaufgabe (a) sehen wir:

- Wir zeigen, dass die Abbildung f injektiv ist, indem wir zeigen:
  Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = f(m) \Rightarrow m = n$.
  Seien daher $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt
  $$f(n) = n + 1 = m + 1 = f(m) \;\Rightarrow\; m = n.$$
- Die Abbildung f ist nicht surjektiv, da $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.
- Die Abbildung g ist nicht injektiv, da $g(1) = 1 = g(2)$.
- Die Abbildung g ist surjektiv, denn:
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $g(m) = n$ (vgl. Definition von surjektiv).
  * Fall $n = 1$: $g^{-1}(\{1\}) = \{1\} \Rightarrow m = 1$ und $g(m) = g(1) = 1$
  * Fall $n \geq 2$: $g^{-1}(\{n\}) = \{n + 1\} \Rightarrow m = n + 1$ und $g(m) = g(n + 1) = n$
- Die Abbildung h ist injektiv, denn: Für $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $n \neq n'$ gibt es vier Fälle (nur die ersten beiden Fälle sind interessant, die anderen 2 sind analog zu den ersten beiden):
  - n gerade, n' gerade: Wegen $n \neq n'$ ist dann $h(n) = n - 1 \neq n' - 1 = h(n')$.
  - n gerade, n' ungerade: Wegen $n \neq n' + 2$ (n gerade vs. n' ungerade!) gilt dann $h(n) = n - 1 \neq n' + 1 = h(n')$.
  - n ungerade, n' ungerade: Wegen $n \neq n'$ ist dann $h(n) = n + 1 \neq n' + 1 = h(n')$.
  - n ungerade, n' gerade: Wegen $n + 2 \neq n'$ (n ungerade vs. n' gerade!) gilt dann $h(n) = n + 1 \neq n' - 1 = h(n')$.
- Die Abbildung h ist surjektiv, denn:
  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wollen für $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ angeben mit $h(m) = n$.
  * Fall $n \in \mathbb{N}$ gerade: Wähle $m = n - 1$ (ungerade), dann ist $h(m) = h(n - 1) = (n - 1) + 1 = n$
  * Fall $n \in \mathbb{N}$ ungerade: Wähle $m = n + 1$ (gerade), dann ist $h(m) = h(n + 1) = (n + 1) - 1 = n$.
- Damit ist h sogar bijektiv.

(c) Wir bestimmen die Kompositionen (1.) $f \circ g$ und (2.) $h \circ f$.

(1.) Es ist $f(g(1)) = f(1) = 2$. Falls $n \geq 2$ gilt: $f(g(n)) = f(n-1) = (n-1)+1 = n$
Also:

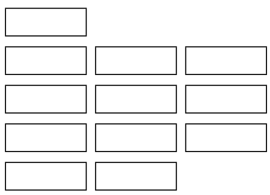
$$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \begin{cases} 2, & \text{für } n = 1 \\ n, & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$$

(2.) Es gilt:
Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade $\Rightarrow f(n) = n+1$ ungerade $\Rightarrow h(f(n)) = (n+1)+1$
Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade $\Rightarrow f(n) = n+1$ gerade $\Rightarrow h(f(n)) = (n+1)-1$
Also:

$$h \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \begin{cases} n, & n \in \mathbb{N} \text{ ungerade}, \\ n+2, & n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \end{cases}$$

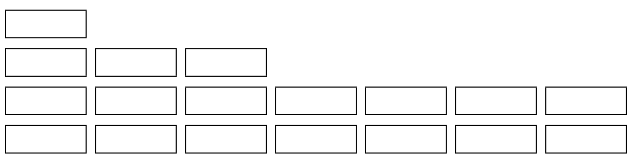
Aufgabe 3 (Mengen und Abbildungen, 4 = 1,5 + 1 + 1,5 Punkte).
Seien X, Y, A, B, C, D Mengen mit $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; Vervollständigen Sie dazu das untenstehende Beweisgerüst mit den angegebenen Blöcken:



Blöcke: $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f,\, y = f(x)}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def.} \cap}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def.} \cap}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f}}$ $\boxed{y \in f(A) \cap f(B)}$ $\boxed{\text{Es gibt } x \in A \cap B \text{ mit}}$ $\boxed{\text{und } y \in f(B)}$ $\boxed{\text{Sei } y \in f(A \cap B)}$ $\boxed{x \in A \text{ und}}$ $\boxed{y \in f(A)}$ $\boxed{y = f(x)}$ $\boxed{x \in B}$

(b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$; Vervollständigen Sie dazu für die Richtung „$\supseteq$“ folgendes Beweisgerüst mit den untenstehenden Blöcken:



Blöcke: $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f^{-1}}}$ $\boxed{\xRightarrow{f(x) = y}}$ $\boxed{\xRightarrow{f(x) = y}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def.} \cup}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f^{-1}}}$ $\boxed{\Rightarrow y \in C \cup D}$ $\boxed{\Rightarrow y \in C \cup D}$ $\boxed{\text{Fall 1: } x \in f^{-1}(C)}$ $\boxed{x \in f^{-1}(D)}$ $\boxed{\text{Sei } x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)}$ $\boxed{\text{Fall 2: } x \in f^{-1}(D)}$ $\boxed{\text{mit } f(x) = y}$ $\boxed{\text{mit } f(x) = y}$ $\boxed{\text{Es gibt } y \in C}$ $\boxed{\text{Es gibt } y \in D}$ $\boxed{x \in f^{-1}(C \cup D)}$ $\boxed{x \in f^{-1}(C \cup D)}$ $\boxed{x \in f^{-1}(C) \text{ oder}}$

(c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Gilt in (a) sogar Gleichheit?
Hinweis: Erwartet wird in (a),(b),(c) ein formal korrekter Beweis der Aussagen mit Implikationen „$\Rightarrow$“. Für die Frage am Ende wird entweder ein formaler Beweis oder ein Gegenbeispiel unter expliziter Angabe einer (möglichst einfachen) Abbildung f erwartet.

Lösung:

(a) Sei $y \in f(A \cap B)$.
$\overset{\text{Def. } f}{\Longrightarrow}$ Es gibt $x \in A \cap B$ mit $y = f(x)$.
$\overset{\text{Def. } \cap}{\Longrightarrow}$ $x \in A$ und $x \in B$
$\overset{\text{Def. } f,\ y = f(x)}{\Longrightarrow}$ $y \in f(A)$ und $y \in f(B)$
$\overset{\text{Def. } \cap}{\Longrightarrow}$ $y \in f(A) \cap f(B)$

Die andere Richtung „$\supseteq$“ gilt nicht. Sei zum Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, und $A = \{-2\}$, $B = \{2\}$. Dann ist $A \cap B = \emptyset$ und $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, aber $f(A) = \{4\} = f(B)$ und somit $f(A) \cap f(B) = \{4\}$.
Daher ist $f(A) \cap f(B) = \{4\} \nsubseteq \emptyset = f(A \cap B)$.

(b) Für Gleichheit müssen wir zwei Mengeninklusionen zeigen:

$$f^{-1}(C \cup D) \subseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \text{ und } f^{-1}(C \cup D) \supseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

„$\subseteq$“: Sei $x \in f^{-1}(C \cup D)$.
$\overset{\text{Def. } f^{-1}}{\Longrightarrow}$ Es existiert $y \in C \cup D$ mit $f(x) = y$.
$\overset{\text{Def. } \cup}{\Longrightarrow}$ $y \in C$ oder $y \in D$
$\overset{\text{Def. } f^{-1},\ f(x) = y}{\Longrightarrow}$ $x \in f^{-1}(C)$ oder $x \in f^{-1}(D)$
$\overset{\text{Def. } \cup}{\Longrightarrow}$ $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

„$\supseteq$“: Sei $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
$\overset{\text{Def. } \cup}{\Longrightarrow}$ $x \in f^{-1}(C)$ oder $x \in f^{-1}(D)$
Fall 1: $x \in f^{-1}(C) \overset{\text{Def. } f^{-1}}{\Longrightarrow}$ Es gibt $y \in C$ mit $f(x) = y$. $\Rightarrow y \in C \cup D \overset{f(x) = y}{\Longrightarrow}$ $x \in f^{-1}(C \cup D)$
Fall 2: $x \in f^{-1}(D) \overset{\text{Def. } f^{-1}}{\Longrightarrow}$ Es gibt $y \in D$ mit $f(x) = y$. $\Rightarrow y \in C \cup D \overset{f(x) = y}{\Longrightarrow}$ $x \in f^{-1}(C \cup D)$

(c) Zu zeigen ist eine Gleichheit von Mengen. Wir zeigen „$\subseteq$“ und „$\supseteq$“, d.h.

$$f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \text{ und } f^{-1}(C \cap D) \supseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

„$\subseteq$“: Sei $x \in f^{-1}(C \cap D)$.
$\Rightarrow f(x) \in C \cap D$.
$\Rightarrow f(x) \in C$ und $f(x) \in D$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ und $x \in f^{-1}(D)$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

„$\supseteq$“: Sei $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
$\Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ und $x \in f^{-1}(D)$
$\Rightarrow f(x) \in C$ und $f(x) \in D$.
$\Rightarrow f(x) \in C \cap D$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D)$

Aufgabe 4 (Surjektivität, 4 = 2 + 2 Punkte).
Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv

(b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

Hinweis: Falls die jeweilige Aussage falsch ist, wird die Angabe eines Gegenbeispiels mit expliziten Zahlen erwartet. Falls die Aussage wahr ist, so muss ein Beweis formuliert werden.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch. Wir geben ein Gegenbeispiel an und definieren $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1\}$.

$$f : A \to B,\ x \mapsto x \quad \text{und} \quad g : B \to C,\ x \mapsto 1.$$

Dann ist

$$g \circ f : A \to C,\ x \mapsto 1$$

surjektiv, denn: Sei $c \in C = \{1\} \Rightarrow c = 1$. Wähle $1 \in A$, dann ist $(g \circ f)(1) = 1 = c$. Allerdings ist f nicht surjektiv, denn: Für $3 \in B$ gilt: $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$.

(b) Die Aussage ist wahr. Beweis:
Sei $c \in C$.
$\overset{g \circ f \text{ surjektiv}}{\Longrightarrow}$ Es gibt $a \in A$ mit $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$.
Wähle $b := f(a) \in B$.
$\Longrightarrow g(b) = g(f(a)) = c$.
Damit haben wir für jedes $c \in C$ ein $b \in B$ angegeben mit $c = g(b)$, d.h. g ist surjektiv.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **25. Oktober 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`