Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

1. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 1 (Mengenlehre, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) Gegeben seien die Mengen $X = \{4, 6, 8\}$, $Y = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x \leq 9\}$, $Z = \{x \in \mathbb{N} : x > 6\}$. Geben Sie die folgenden Mengen an:

(i) $\mathcal{P}(X)$,

(ii) $X \cup Y$, $Y \cap Z$, $Y \setminus X$ und $Z \setminus Y$,

(iii) $(Y \cap Z) \times (X \cap Y)$.

Hinweis: Erwartet wird hier die vollständig vereinfachte Angabe der gesuchten Mengen in elementweiser Aufzählung oder der Form $\{x \in \mathbb{N} : ...\}$, *keine Herleitung!*

(b) Es seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie:

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

Hinweis: Erwartet wird hier ein direkter Beweis der Aussage mittels Implikationen „$\Rightarrow$“ oder Äquivalenzen „$\Leftrightarrow$“.
Sie dürfen ohne Beweis die folgenden Regeln aus der Aussagenlogik verwenden: Für Aussagen a,b,c gilt:

- *De Morgan'sche Regel:* „nicht(a und b)“ $\Leftrightarrow$ „nicht(a) oder nicht(b)“
- *Distributivgesetz:* „(a oder b) und c “ $\Leftrightarrow$ „(a und c) oder (b und c)“

Aufgabe 2 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Die Abbildungen $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien gegeben durch:

$$f(n) := n + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$
$$g(1) := 1 \text{ und } g(n) := n - 1 \text{ für alle } n \geq 2,$$
$$h(n) := \begin{cases} n + 1 & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N} \\ n - 1 & \text{für gerades } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild von der Menge $X = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ unter f und die Urbilder der Mengen $\{11, 12\} \subseteq \mathbb{N}$ und $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$ unter der Abbildung h.
Hinweis: Erwartet wird hier nur die formal korrekte elementweise Angabe der gesuchten Mengen, keine Herleitung!

(b) Untersuchen Sie, ob f, g und h jeweils injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv sind.
Hinweis: Falls die jeweilige Eigenschaft verletzt ist, wird die Angabe eines Gegenbeispiels mit expliziten Zahlen erwartet. Falls die Eigenschaft erfüllt ist, so muss die Definition nachgerechnet werden. Beispiel surjektiv: Geben sie dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ (in Abhängigkeit von n) an, so dass $f(m) = n$.

(c) Bestimmen Sie die Kompositionen $f \circ g$ und $h \circ f$.
Hinweis: Erwartet wird hier die Angabe der jeweils vollständig vereinfachten Abbildung unter Angabe der Zwischenschritte!

Aufgabe 3 (Mengen und Abbildungen, 4 = 1,5 + 1 + 1,5 Punkte).

Seien X, Y, A, B, C, D Mengen mit $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; Vervollständigen Sie dazu das untenstehende Beweisgerüst mit den angegebenen Blöcken:

Blöcke: $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f,\ y = f(x)}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def.} \cap}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def.} \cap}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f}}$ $\boxed{y \in f(A) \cap f(B)}$ $\boxed{\text{Es gibt } x \in A \cap B \text{ mit}}$ $\boxed{\text{und } y \in f(B)}$ $\boxed{\text{Sei } y \in f(A \cap B)}$ $\boxed{x \in A \text{ und}}$ $\boxed{y \in f(A)}$ $\boxed{y = f(x)}$ $\boxed{x \in B}$

(b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$; Vervollständigen Sie dazu für die Richtung „$\supseteq$“ folgendes Beweisgerüst mit den untenstehenden Blöcken:

Blöcke: $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f^{-1}}}$ $\boxed{\xRightarrow{f(x) = y}}$ $\boxed{\xRightarrow{f(x) = y}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def.} \cup}}$ $\boxed{\xRightarrow{\text{Def. } f^{-1}}}$ $\boxed{\Rightarrow y \in C \cup D}$ $\boxed{\Rightarrow y \in C \cup D}$ $\boxed{\text{Fall 1: } x \in f^{-1}(C)}$ $\boxed{x \in f^{-1}(D)}$ $\boxed{\text{Sei } x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)}$ $\boxed{\text{Fall 2: } x \in f^{-1}(D)}$ $\boxed{\text{mit } f(x) = y}$ $\boxed{\text{mit } f(x) = y}$ $\boxed{\text{Es gibt } y \in C}$ $\boxed{\text{Es gibt } y \in D}$ $\boxed{x \in f^{-1}(C \cup D)}$ $\boxed{x \in f^{-1}(C \cup D)}$ $\boxed{x \in f^{-1}(C) \text{ oder}}$

(c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Gilt in (a) sogar Gleichheit?

Hinweis: Erwartet wird in (a),(b),(c) ein formal korrekter Beweis der Aussagen mit Implikationen „$\Rightarrow$“. Für die Frage am Ende wird entweder ein formaler Beweis oder ein Gegenbeispiel unter expliziter Angabe einer (möglichst einfachen) Abbildung f erwartet.

Aufgabe 4 (Surjektivität, 4 = 2 + 2 Punkte).
Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ f surjektiv

(b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv

Hinweis: Falls die jeweilige Aussage falsch ist, wird die Angabe eines Gegenbeispiels mit expliziten Zahlen erwartet. Falls die Aussage wahr ist, so muss ein Beweis formuliert werden.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **25. Oktober 2018, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`