Lineare Abbildungen und Matrizen

V, W Vektorräume über Körper K,
$(v_i)_{i\in I}$ Familie von Vektoren in V

Rang(A)
$:= \text{Spaltenrang}(A)$

$A \in M(m\times n, K)$ motiviert

Satz:
$\text{Bild}(\tilde{A}) = \text{Lin}((Ae_1, \dots, Ae_n))$
$= SR(A)$
$\text{Rang}(\tilde{A}) = \text{Spaltenrang}(A)$
$\text{Kern}(\tilde{A}) = \{x \in K^n : Ax = 0\}$

Rang(f)
$= \dim_K(\text{Bild}(f))$

Von Matrix A induzierte lineare Abbildung $\tilde{A}$
$A \in M(m\times n, K)$
$\Rightarrow \tilde{A}: K^n \to K^m,\ x \mapsto A\cdot x$ ist linear.

Satz: Ist $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V und $w_1, \dots, w_n \in W$, dann gibt es genau eine lin. Abb. $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Satz:
- $f(0) = 0$
- $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K,\ v_1, \dots, v_n \in V$:
  $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(v_i)$
- $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig
  $\Rightarrow (f(v_i))_{i\in I}$ linear abhängig
- $(v_i)_{i\in I}$ lin. unabh., f injektiv
  $\Rightarrow (f(v_i))_{i\in I}$ lin. unabh.

$e_1, \dots, e_n$ Einheitsvektoren

Erhalte A mittels
$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \cdots & f(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$

Spezialfall
$V = K^n,\ W = K^m$

Satz:
$f(\text{Lin}((v_i)_{i\in I}))$
$= \text{Lin}((f(v_i))_{i\in I})$

berechne damit

Satz: $V' \subseteq V$ UVR $\Rightarrow f(V') \subseteq W$ UVR
$W' \subseteq W$ UVR $\Rightarrow f^{-1}(W') \subseteq V$ UVR

ist UVR

Bild(f)
$= f(V) = \{f(v) : v \in V\}$

ist UVR

Kern(f)
$= f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : f(v) = 0\}$

$f: V \to W$ (K-)linear bzw. Homomorphismus
$\forall u, v \in V,\ \lambda \in K$: $f(u+v) = f(u) + f(v)$
$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

$V = W$

$f: V \to V$ Endomorphismus
f K-linear

Satz: Ist auch $g: U \to V$ linear $\Rightarrow f \circ g: U \to W$ linear

Dimensionsformel für lin. Abb.
$\dim_K(V) = \dim_K \text{Kern}(f) + \dim_K \text{Bild}(f)$

$\text{Hom}_K(V, W)$
$= \{f : V \to W \mid f \text{ K-linear}\}$

Addition / skalare Multiplikation von Abbildungen $f, g: V \to W$
$\forall x \in V,\ \lambda \in K$:
$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

$\text{End}_K(V)$
$= \{f : V \to V \mid f \text{ Endomorphismus}\}$

f surjektiv
$\Leftrightarrow \text{Bild}(f) = W$

f injektiv
$\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\}$

+ bijektiv

Satz: $\text{Hom}_K(V, W)$ ist K-Vektorraum bzgl. $+, \cdot$

Satz: $\text{End}_K(V)$ ist Ring mit 1 bzgl. $+, \circ$
Einselement: id_V

+ bijektiv

$\dim_K(V) = \dim_K(W)$

Ein möglicher Isomorphismus bildet Basis von V auf Basis von W ab.

$f: V \to W$ Isomorphismus
f K-linear und bijektiv

$V = W$

$f: V \to V$ Automorphismus
f K-linear und bijektiv

(falls V, W endlich erzeugt)

$\dim_K(V) = \dim_K(W)$

$V \cong W$ isomorph
Es gibt Isomorphismus $f: V \to W$

$\text{Iso}_K(V, W)$
$= \{f : V \to W \mid f \text{ Isomorphismus}\}$

$\text{Aut}_K(V)$
$= \{f : V \to V \mid f \text{ Automorphismus}\}$

Satz:
$f: V \to W$ Isom.
$\Rightarrow f^{-1}: W \to V$ Isom.

Satz: $n = m \Leftrightarrow K^n \cong K^m$
$n = \dim_K(V) \Leftrightarrow V \cong K^n$