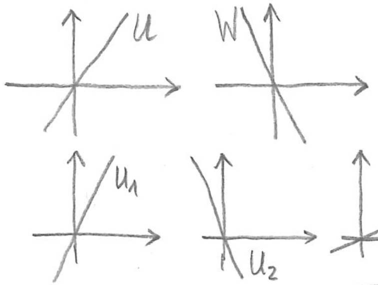
Summen von Unterverktorräumen und Dimensionsformel

V Vektorraum über Körper K, $U_1, \dots, U_r \subseteq V$ UVR

Beispiel



$U \oplus W = \mathbb{R}^2$

$U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$, aber nicht $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = \mathbb{R}^2$

falls alle beteiligten (Unter-)vektorräume endlich erzeugt

$U \cap W$

Satz: $U \cap W$ ist UVR

$U \cap W \subseteq W \subseteq V$ UVR, $U \cap W \subseteq U \subseteq V$ UVR

$U \subseteq V$ UVR $\Rightarrow$ $\dim_K(U) \leq \dim_K(V)$

Satz: $U = V \Leftrightarrow \dim_K(U) = \dim_K(V)$

$W \subseteq U+W$, $U \subseteq U+W$

$U+W$ Summe von UVR

$U+W := \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

Satz: $U+W = \mathrm{Lin}(U \cup W)$ ist wieder UVR

Satz: Falls $U = \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_n)$, $W = \mathrm{Lin}(w_1, \dots, w_m)$, dann: $U+W = \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m)$

$\dim_K(U+W) \leq \dim_K(U) + \dim_K(W)$

Dimensionsformel

$$\dim_K(U+W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W)$$

Verallgemeinerung

$U_1 + \dots + U_r$

$U_1 + \dots + U_r := \{u_1 + \dots + u_r \mid \forall i = 1, \dots, r: u_i \in U_i\}$

Satz: $U_1 + \dots + U_r = (\dots(U_1 + U_2) + U_3) + \dots) + U_r$

$r=3$: $U_1 + U_2 + U_3 = (U_1 + U_2) + U_3$

$V = U \oplus W$ direkte Summe von UVR

$V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$

$\forall v \in V\ \exists$ eindeutige $u \in U, w \in W$ mit $v = u + w$. $\Leftrightarrow$ $V = U \oplus W$

$V = U \oplus W \Leftrightarrow V = U + W$ und $\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(W)$

$V = U \oplus W \Leftrightarrow$ Für alle Basen B von U, B' von W ist $B \cup B'$ Basis von V

„Für alle" kann durch „Für eine" ersetzt werden.

Satz: Es existiert ein Komplement (nicht eindeutig)

U Komplement von W (in V)

$V = U \oplus W$

Verallgemeinerung

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$

$\forall v \in V\ \exists$ eindeutige $u_i \in U_i$ $(i = 1, \dots, r)$ mit $v = u_1 + \dots + u_r$

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \Leftrightarrow V = U_1 + \dots + U_r$ und $\forall i \in \{1, \dots, r\}: U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j = \{0\}$

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \Leftrightarrow V = U_1 + \dots + U_r$ und $\dim_K(V) = \dim_K(U_1) + \dots + \dim_K(U_r)$

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \Leftrightarrow$ Für alle Basen B_i von U_i $(i = 1, \dots, r)$ ist $B_1 \cup \dots \cup B_r$ Basis von V