# Lineare Unabhängigkeit und Basen von Vektorräumen

$I$ Indexmenge, $V$ Vektorraum über Körper $K$,
$v_1, \dots, v_n \in V$, $v_i \in V$ $(i \in I)$

**$v$ ist Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$**

Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$n$ heißt Länge der Basis

**Basisauswahlsatz:**
Es gibt $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ so dass $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ Basis

Satz: Jeder endlich erzeugte VR hat Basis

**$V$ endlich erzeugt**

Es gibt endliches ES

„Entferne Vektoren aus ES"

**Erzeugendensystem (ES)**

$(v_1, \dots, v_n)$ Erzeugendensystem von $V$

$V = \mathrm{Lin}(\{v_1, \dots, v_n\})$

$(v_i)_{i \in I}$ ES von $V$

$V = \mathrm{Lin}(\{v_i\}_{i \in I})$

**Lineare Hülle $\mathrm{Lin}(M)$**

- $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ endlich:
  $\mathrm{Lin}(M) := \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\}$
- $M \subseteq V$ unendlich:
  $\mathrm{Lin}(M) := \bigcup_{\substack{L \subseteq M \\ L \text{ endlich}}} \mathrm{Lin}(L)$

## Charakterisierungen von Basen (endlich)

**$(v_1, \dots, v_n)$ unverkürzbares ES von $V$**

$(v_1, \dots, v_n)$ ist ES von $V$ und $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ kein ES von $V$

**$(v_1, \dots, v_n)$ unverlängerbar linear unabhängig**

$(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig und $\forall v \in V$: $(v_1, \dots, v_n, v)$ ist linear abhängig

**Eindeutige Darstellung durch $(v_1, \dots, v_n)$**

$\forall v \in V$ gibt es eindeutige $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

**Basis**

$(v_1, \dots, v_n)$ Basis von $V$

$(v_1, \dots, v_n)$ ist ES von $V$ und linear unabhängig

$(v_i)_{i \in I}$ Basis von $V$

$(v_i)_{i \in I}$ ist ES von $V$ und linear unabhängig

$(e_1, \dots, e_n)$ ist Basis des $K^n$

**Einheitsvektoren:** Für $i = 1, \dots, n$:
$e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ← $i$-te Stelle

**Standard-VR $K^n$ über $K$**

$V = K^n$, für $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $\lambda \in K$ definiere
$a + b := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
$\lambda \cdot a := (\lambda \cdot a_1, \dots, \lambda \cdot a_n)$

**Austauschlemma:**
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $w := \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist auch $(v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n)$ Basis von $V$

„Austausch von einem oder mehreren Basisvektoren"

„Wiederholte Anwendung"

**Austauschsatz:**
Ist $(w_1, \dots, w_r)$ linear unabhängig, so ist $n \geq r$ und es gibt $i_{r+1}, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$ so dass $(w_1, \dots, w_r, v_{i_{r+1}}, \dots, v_{i_n})$ wieder eine Basis von $V$ ist

**Lineare Unabhängigkeit (l.u.)**

$(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig

$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig

$\forall J \subseteq I$, $J$ endlich: $(v_i)_{i \in J}$ linear unabhängig

falls nicht

$(v_1, \dots, v_n)$ linear abhängig (l.a.)

falls nicht

$(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig

$n \geq 2$

Es gibt $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, so dass $v_{i_0}$ Linearkomb. von allen anderen Vektoren $v_1, \dots, v_{i_0 - 1}, v_{i_0 + 1}, \dots, v_n$ ist

**Eindeutige Darstellung:**
$\forall v \in \mathrm{Lin}(\{v_i\}_{i \in I})$ gibt es eindeutige $J \subseteq I$, $\lambda_i \in K$ $(i \in J)$ mit
$$v = \sum_{i \in J} \lambda_i v_i$$