Vektorräume, Untervektorräume
Lineare Hülle

$(K,+,\cdot)$ Körper
neutrales El. Add. 0_K
Einselement 1

kurz:
- V ist K-VR
- V ist VR über K

$(V,+_V,\cdot_V)$ Vektorraum über $(K,+,\cdot)$

$V \neq \emptyset$ Menge mit Abbildungen

$+ = +_V : V\times V \to V,\quad (v,w)\mapsto v+w$ „Addition"

$\bullet = \cdot_V : K\times V \to V,\quad (\lambda,w)\mapsto \lambda \bullet v$ „skalare Multipl."

„Skalar" „Vektor"

mit

(a) $(V,+_V)$ abelsche Gruppe
neutr. El. 0_V „Nullvektor"
inv. El. zu $v\in V$: $-v$

(b) Verträglichkeit mit skalarer Mult.:
$\forall \lambda,\mu\in K,\ v,w\in V$:

$$(\lambda+\mu)\bullet v = \lambda\bullet v + \mu\bullet v$$
$$\lambda\bullet(v+w) = \lambda\bullet v + \lambda\bullet w$$
$$\lambda\bullet(\mu\bullet v) = (\lambda\cdot\mu)\bullet v$$
$$1\bullet v = v$$

W VR über K

Satz: W ist K-VR
mit Einschränkungen
$+_V : W\times W \to W$
$\cdot_V : K\times W \to W$
$\Leftrightarrow$ W ist UVR von V

Satz: $0_V \in W$

Satz: I Indexmenge
Für $i\in I$ sei W_i UVR von V
$\Rightarrow W = \bigcap_{i\in I} W_i$ ist UVR von V

W Untervektorraum von V über K

$\emptyset \neq W \subseteq V$ mit $\forall v,w\in W,\ \lambda\in K$:

(UV1) $v,w\in W \Rightarrow v+w\in W$

(UV2) $v\in W,\ \lambda\in K \Rightarrow \lambda\bullet v\in W$

W_1, W_2 UVR von V
$\not\Rightarrow W_1\cup W_2$ UVR von V

Spezialfall: $W=\{0_V\}$ ist UVR

ist

Satz: $\mathrm{Lin}(M) = \bigcap_{\substack{U \text{ UVR von } V\\ \text{mit } M\subseteq U}} U$
d.h. Lin(M) ist der kleinste UVR von V, der M enthält

Satz:
$v\in \mathrm{Lin}(\{v_1,\dots,v_r\})$
$\Rightarrow \mathrm{Lin}(\{v,v_1,\dots,v_r\}) = \mathrm{Lin}(\{v_1,\dots,v_r\})$

Satz: $M, M'\subseteq V$. Dann gilt:
- $M\subseteq \mathrm{Lin}(M)$
- $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(M)) = \mathrm{Lin}(M)$
- $M\subseteq M' \Rightarrow \mathrm{Lin}(M)\subseteq \mathrm{Lin}(M')$

Konvention:
$\mathrm{Lin}(\emptyset) = \{0_V\}$

Lineare Hülle Lin(M)

- $M = \{v_1,\dots,v_r\}\subseteq V$ endlich:

$\mathrm{Lin}(M) := \{\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_r v_r \mid \alpha_1,\dots,\alpha_r\in K\}$

Menge aller Linearkombinationen von $v_1,\dots,v_r$

- $M\subseteq V$ unendlich:

$\mathrm{Lin}(M) := \bigcup_{\substack{L\subseteq M\\ L \text{ endlich}}} \mathrm{Lin}(L)$,

Falls M unendlich:
$v\in \mathrm{Lin}(M)$
$\Leftrightarrow \exists$ endliche Teilmenge $\{v_1,\dots,v_s\}\subseteq M$ und $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in K$ mit $v = \lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_s v_s$

$v\in V$ ist Linearkombination von $v_1,\dots,v_r\in V$
Es gibt $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in K$ mit $v=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_r v_r$

Spezialfall

Satz: $\forall\lambda\in K,\ v\in V$:
$0_K\bullet v = 0_V$
$\lambda\bullet 0_V = 0_V$
$(-1)\bullet v = -v$
$\lambda\bullet v = 0_V \Rightarrow \lambda = 0_K$ oder $v = 0_V$

Standard-VR K^n über K

$V = K^n = \{(a_1,\dots,a_n)\in K^n\}$

Für $a=(a_1,\dots,a_n),\ b=(b_1,\dots,b_n)\in K^n$, $\lambda\in K$:

$a+b := (a_1+b_1,\ \dots,\ a_n+b_n)$

$\lambda\bullet a := (\lambda\cdot a_1,\ \dots,\ \lambda\cdot a_n)$

Einheitsvektoren: Für $i=1,\dots,n$:
$e_i := (0,\dots,0,\underset{\uparrow\ i\text{-te Stelle}}{1},0,\dots,0)$

$K^n = \mathrm{Lin}(\{e_1,\dots,e_n\})$