Gruppen

Gruppe $(\mathcal{G}, *)$

Menge $\mathcal{G}$ mit Abbildung
$*: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $(a,b) \mapsto a*b$ „Verknüpfung"
mit:
(a) $\forall a,b,c \in \mathcal{G}: a*(b*c) = (a*b)*c$ „Assoziativität"
(b) Es gibt $e_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ („neutrales Element") mit $\forall a \in \mathcal{G}: e_{\mathcal{G}} * a = a = a * e_{\mathcal{G}}$
(c) $\forall a \in \mathcal{G}\ \exists a' \in \mathcal{G}: a' * a = e_{\mathcal{G}} = a * a'$ „Inverses Element"

→ **Satz:** neutrales Element $e_{\mathcal{G}}$ ist eindeutig!

→ **Satz:** inverses Element a' ist eindeutig (zu gegebenem $a \in \mathcal{G}$)

Satz: Kürzungsregel
$a,b,c \in \mathcal{G}$. Dann gilt:
$a*b = a*c \Rightarrow b=c$
$b*a = c*a \Rightarrow b=c$

Gruppe **$(\mathcal{G},*)$ abelsch/Kommutativ**
$\forall a,b \in \mathcal{G}: a*b = b*a$

Spezialfall: M Menge
$\mathcal{G} = S(M) := \{f: M \to M \mid f \text{ bijektiv}\}$

$(S(M), \circ)$ „symmetrische Gruppe"
- neutrales Element: id_M
- inverses Element zu $f \in S(M)$ ist Umkehrabb. f^{-1}

nicht abelsch!
im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$

Spezialfall $M = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahl
$S_n := S(M)$

$(S_n, \circ)$ „symmetrische Gruppe"

Elemente $\pi \in S_n$

$\pi: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ heißt Permutation

$\pi^2 = \pi \circ \pi$
$\pi^k = \underbrace{\pi \circ \dots \circ \pi}_{k\text{-mal}}$

Permutationsschreibweise:
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Zykelschreibweise:
$$\pi = (1\ \pi(1)\ \pi^2(1) \cdots \pi^{k_1-1}(1))(2\ \pi(2)\ \pi^2(2) \cdots \pi^{k_2-1}(2)) \cdots (n\ \pi(n)\ \pi^2(n) \cdots \pi^{k_n-1}(n)),$$
wobei $k_1 \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, für welche $\pi^{k_1}(1) = 1$ gilt (analog $k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$)
- Die Klammer $(m\ \pi(m)\ \pi^2(m) \cdots \pi^{k_m-1}(m))$, wird weggelassen, wenn m schon in einer vorherigen Klammer auftritt
- Klammern mit nur einem Element (m) werden weggelassen
- Konvention: $id_{\{1,\dots,n\}} = (\,)$

$(H, \circledast)$ weitere Gruppe mit neutralem Element e_H

$\varphi: \mathcal{G} \to H$ Gruppenhomomorphismus
$\forall a,b \in \mathcal{G}: \varphi(a*b) = \varphi(a) \circledast \varphi(b)$

→ **Satz:** $\varphi(e_{\mathcal{G}}) = e_H$
$\forall a \in \mathcal{G}: \varphi(a') = \varphi(a)'$

$\Downarrow$ + bijektiv $\quad \Uparrow$

$\varphi: \mathcal{G} \to H$ Gruppenisomorphismus
φ Gruppenhomomorphismus und bijektiv

→ **Satz:** $\varphi^{-1}: H \to \mathcal{G}$ Gruppenisomorphismus

$\Downarrow$ Es gibt φ

$(\mathcal{G},*)$, $(H,\circledast)$ isomorph, $(\mathcal{G},*) \cong (H,\circledast)$
Es gibt Gruppenisomorphismus $\varphi: \mathcal{G} \to H$