Determinanten

$B,\ A = (a_{ij}) \in M(n\times n, K)$, K Körper, $\lambda \in K$

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \leftarrow$ Zeilen von A

V VR über K, $\dim_K(V) < \infty$, $f: V \to V$ linear

Determinante $\det(f)$

$\mathcal{B}$ beliebige Basis von V

$\det(f) := \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$

det(f) wohldefiniert

Satz: $A \approx B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$

Signum $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, +1\}$

$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i}$

Gibt an, ob eine gerade (+1) oder ungerade (-1) Zahl von Zeilenvertauschungen nötig ist, um $\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ in $E_n = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ umzuwandeln.

$\sigma \in S_n$

$S_n = \{\sigma : \{1,..,n\} \to \{1,..,n\}$ bijektiv$\}$

Determinante $\det(A) \in K$

Gibt Volumen des durch $a_1, .., a_n$ aufgespannten Parallelepipeds an,

Normierung: $\det(E_n) = 1$.

Satz: Leibniz-Formel

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$

$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$!

Regeln

Multiplikationssatz

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

A invertierbar $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$\det(A^t) = \det(A)$

$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Satz: $\det(A) \neq 0 \iff A$ invertierbar $\iff \operatorname{Rang}(A) = n$

$\operatorname{Rang}(A) = n \iff (a_1, .., a_n)$ ist Basis von K^n

A invertierbar $\Rightarrow$ LGS $Ax = b$ hat genau eine Lösung $x = A^{-1}b$

$b \in K^n$

$A = (a^1, .., a^n)$

Spalten von A

Cramer'sche Regel

LGS $Ax = b$ hat genau eine Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit

$x_i = \frac{\det(a^1, \ldots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \ldots, a^n)}{\det(A)}$

Komplementäre Matrix $A^{\#} = (a_{ij}^{\#})$

$a_{ij}^{\#} = \det(A_{ji})$

$= \det(A'_{ji}) \cdot (-1)^{i+j}$

$A_{ij} \in M(n\times n, K)$

Entsteht aus A durch Ersetzen von Zeile i, Spalte j durch $0\cdots 0\,1\,0\cdots 0$

$A'_{ij} \in M((n-1)\times(n-1), K)$

Entsteht aus A durch Streichen von Zeile i und Spalte j.

Satz: $A \cdot A^{\#} = \det(A) \cdot E_n$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$

Berechnung

Regel bei lin. Abhängigkeit

Falls $a_1, .., a_n$ linear abhängig $\Rightarrow \det(A) = 0$

Gleiches gilt für Spaltenumf.!

Elementare Zeilenumformungen

$\lambda \in K$, $i, j \in \{1, .., n\}$, $i \neq j$

(I) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda^{-1} a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

(II) $\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

(III) $\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Versuche ZSF zu erzeugen

Regel für Dreiecksmatrizen

$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Regel für Blockmatrizen

$\det\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det(A_1) \cdot \det(A_2) = \det\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix}$

Versuche viele Nullen zu erzeugen

Entwicklungssatz von Laplace

- Entwicklung nach i-ter Zeile, $i \in \{1, .., n\}$:

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$

- Entwicklung nach j-ter Spalte, $j \in \{1, .., n\}$:

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$

Wähle Zeile/Spalte wo viele $a_{ij} = 0$!

Reduktion auf Determ. von $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen

Regel für 2x2-Matrizen

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Regel von Sarrus (3x3-Matrizen)

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$