Darstellungsmatrizen und Basiswechsel

U, V, W seien VR über Körper K

Basen $B=(v_1,\dots,v_n), B', B''$

Basen $C=(w_1,\dots,w_m), C'$

lineare Abbildung f

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\Phi_B"] \arrow[r, "\widetilde{M^B_C(f)}"'] & K^m \arrow[u, "\Phi_C"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\Phi_{B'}"] \arrow[r, "\widetilde{M^{B'}_{C'}(f)}"'] & K^m \arrow[u, "\Phi_{C'}"'] \end{tikzcd}$$

Darstellungssatz:

$f = \Phi_C \circ \widetilde{M^B_C(f)} \circ \Phi_B^{-1}$

Ist $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$, dann: $\Phi_B^{-1}(v) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$

Koordinaten(-vektor) von $v\in V$ bzgl. B

$\Phi_B^{-1}(v)$

Satz: Φ_B ist eindeutig bestimmt und ein Isomorphismus

Koordinatenabbildung $\Phi_B: K^n \to V$

Φ_B lineare Abb. mit $\forall i=1,\dots,n: \Phi_B(e_i)=v_i$

Satz: Ist $f=\tilde{A}$ mit $A\in M(m\times n, K)$, d.h. $\forall x\in K^n$: $f(x)=Ax$, dann: $M^{(e_1,\dots,e_n)}_{(e_1,\dots,e_m)}(f)=A$

$\operatorname{Kern}(f) = \Phi_B(\operatorname{Kern}(\widetilde{M^B_C(f)}))$

$\dim_K \operatorname{Kern}(f) = \dim_K \operatorname{Kern}(\widetilde{M^B_C(f)})$

$\operatorname{Bild}(f) = \Phi_C(\operatorname{Bild}(\widetilde{M^B_C(f)}))$

$\dim_K \operatorname{Bild}(f) = \dim_K \operatorname{Bild}(\widetilde{M^B_C(f)})$

$\operatorname{Kern}(\tilde{M}) = \text{Lös}(M,0)$

$\operatorname{Bild}(\tilde{M}) = \text{Spaltenraum}(M)$

Spezialfall $V=K^n$, $W=K^m$

Darstellungsmatrix $M^B_C(f)$

$$M^B_C(f) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \Phi_C^{-1}(f(v_1)) & \cdots & \Phi_C^{-1}(f(v_n)) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

In j-ter Spalte von $M^B_C(f)$ stehen die Koordinaten von $f(v_j)$ bzgl. C, d.h. $M^B_C(f)$ ist eindeutig bestimmt durch die Gleich.

(1) $\forall j=1,\dots,n: \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (M^B_C(f))_{ij}\, w_i$

$f: V\to V$ — $M_B(f) := M^B_B(f)$

2 Möglichkeiten zur Bestimmung einer Darstell.-matrix $M^{B'}_{C'}(f)$
- Nutze (1) oder
- Finde $M^B_C(f)$ bzgl. „leichter" Basen B, C und nutze (2)

Basiswechsel / Transformationsformel

$M^{B'}_{C'}(f) = T^C_{C'} \cdot M^B_C(f) \cdot T^{B'}_B$ (2)

Satz (Kompositionsformel):

Falls $g: U\to V$ mit U VR und A Basis von U

$\Rightarrow M^A_C(f\circ g) = M^B_C(f)\cdot M^A_B(g)$

Regeln: $f_2: V\to W$, $\lambda\in K$

$\Rightarrow M^B_C(\lambda\cdot f) = \lambda\cdot M^B_C(f)$

$M^B_C(f+f_2) = M^B_C(f) + M^B_C(f_2)$

f bijektiv

Satz: $M^C_B(f^{-1}) = (M^B_C(f))^{-1}$

Satz: $T^B_{B'} = T^{B''}_{B'}\cdot T^B_{B''}$

Satz: $T^B_{B'}$ ist invertierbar und $(T^B_{B'})^{-1} = T^{B'}_B$

Transformationsmatrix $T^B_{B'}$

$T^B_{B'} = M^B_{B'}(\mathrm{id}_V)$

$\widetilde{T^B_{B'}} = \Phi_{B'}^{-1}\circ\Phi_B$

Interpretation: M und M' sind Darstell.-Matrizen einer linearen Abb. $f: V\to W$ bzgl. verschiedener Basen:

$\overbrace{M^{B'}_{C'}(f)}^{M'} = \overbrace{T^C_{C'}}^{S}\cdot\overbrace{M^B_C(f)}^{M}\cdot\overbrace{T^{B'}_B}^{T^{-1}}$

Interpretation: $V=W$, M und M' sind Darstell.-Matr. eines Endomorph. $f: V\to V$ bzgl. verschiedener Basen (gleiche in Start/Zielraum von f)

$\overbrace{M^{B'}_{B'}(f)}^{M'} = \overbrace{T^B_{B'}}^{S}\cdot\overbrace{M^B_B(f)}^{M}\cdot\overbrace{T^{B'}_B}^{S^{-1}}$

Satz: Sei $(w_1,\dots,w_r)$ Basis von $\operatorname{Bild}(f)$, ergänze zu $C=(w_1,\dots,w_m)$ Basis von W. Sei $(v_1,\dots,v_k)$ Basis von $\operatorname{Kern}(f)$ und $u_i \in f^{-1}(\{w_i\})$ beliebig $(i=1,\dots,r)$

$\Rightarrow B=(u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_k)$ Basis von V und

$M^B_C(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $r=\operatorname{Rang}(f)$

$M \sim M'$ äquivalent

$\exists\, S\in GL(m,K)$, $T\in GL(n,K)$: $M' = S\cdot M\cdot T^{-1}$

$\Updownarrow$

$\operatorname{Rang}(M) = \operatorname{Rang}(M')$

$M, M' \in M(m\times n, K)$

$m=n$

$M \approx M'$ ähnlich

$\exists\, S\in GL(n,K)$: $M' = S\cdot M\cdot S^{-1}$