Mengen und Abbildungen

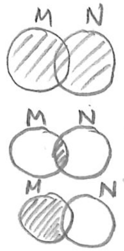
Beschreibung durch:
- Aufzählung $M = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Charakterisierende Eigenschaft $M = \{x \in X : E(x)\}$

Menge M
Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen

Spezialfall

Leere Menge $\emptyset$
Enthält kein Element

Satz: $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M



Erzeugung neuer Mengen aus bereits vorhandenen Mengen M, N

$M \cup N := \{a \mid a \in M \text{ oder } a \in N\}$ „Vereinigung"

$M \cap N := \{a \mid a \in M \text{ und } a \in N\}$ „Durchschnitt"

$M \setminus N := \{a \mid a \in M \text{ und } a \notin N\}$ „Komplement"/„Differenz"

$M \times N := \{(a,b) : a \in M, b \in N\}$ „kartesisches Produkt"

$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$ Potenzmenge

$x \in M$, $x \notin M$
x ist Element bzw. ist kein Element von M

$A \subseteq M$, A Teilmenge von M
$\forall x: x \in A \Rightarrow x \in M$

$A = M$ Gleichheit von Mengen
$A \subseteq M$ und $M \subseteq A$

Regeln

Distributivgesetz:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgan:
$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

Bild $f(A)$
$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$

$A \subseteq M$

Urbild $f^{-1}(B)$
$f^{-1}(B) := \{m \in M : f(m) \in B\}$

$B \subseteq N$

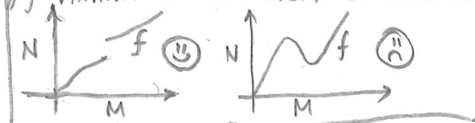
Abbildung $f: M \to N,\ m \mapsto f(m)$
Jedem $m \in M$ wird genau ein Element $f(m) \in N$ zugeordnet.

Spezialfall

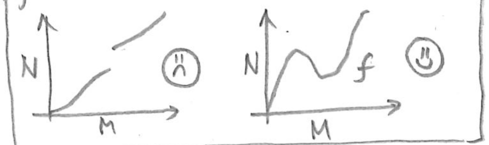
Identische Abbildung id_M
$id_M : M \to M,\ m \mapsto m$

Gleichheit von Abb. $f = g$
$f: M \to N, \quad g: M \to N$
$\forall m \in M: f(m) = g(m)$

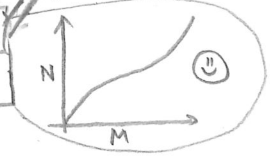
f injektiv
$\forall m_1, m_2 \in M: f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$
$\Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in M: m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2)$
„f nimmt keinen Wert zweimal an"



f surjektiv
$\forall n \in N\ \exists m \in M: f(m) = n$
„f nimmt alle Werte aus N an"



f bijektiv
f injektiv und surjektiv



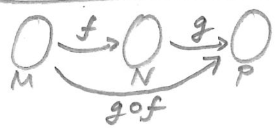
$\Updownarrow$

f besitzt Umkehrabb. $f^{-1} := f'$
$\exists f': N \to M$ mit $f' \circ f = id_M$, $f \circ f' = id_N$

Berechnung f^{-1}: $f^{-1}(n) = m$, wobei $m \in M$ das eindeutig bestimmte Element mit $f(m) = n$.

$g: N \to P$ Abb.

Komposition $g \circ f$
$g \circ f: M \to P$,
$(g \circ f)(m) := g(f(m))$



Satz: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
Komposition ist assoziativ

Satz: Sind f, g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$