1 Einperiodenmodell / Mehrperiodenmodell

(a) Sei (S^0, S^1) ein EPM mit $S_0^0 = 1$, Zinssatz $r > -1$ und einer Aktie mit $S_0^1 = 100$, $\mathbb{P}(S_1^1 = 200) = 0.2$, $\mathbb{P}(S_1^1 = 50) = 0.8$.

- Für welche Werte von r ist das Modell arbitragefrei?

Sei nun $r = 0.05$.

- Bestimmen Sie den fairen Preis einer Call-Option ξ mit $K = 95$.
- Geben Sie ein duplizierendes Portfolio für die obige Call-Option an.
- Angenommen, der Preis der Call-Option zur Zeit $t = 0$ ist $\pi(\xi) = 20$. Konstruieren Sie im erweiterten Modell mit der Call-Option eine Arbitragemöglichkeit.

(b) Wir betrachten ein einperiodisches Modell mit sicherer Anlage $S_t^{(0)} = 1$, Zins $r = 0.5$ und einer Aktie $S^{(1)}$. Die möglichen Preisentwicklungen der Aktie sind in dem Baum unten dargestellt.

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & S_1^{(1)}(\omega_1) = m \\ S_0^{(1)} = 1 & \longrightarrow & S_1^{(1)}(\omega_2) = 1 \\ & \searrow & S_1^{(1)}(\omega_3) = 1/2 \end{array}$$

Bezeichne $S_t^{(1)}$ den Preis der Aktie zum Zeitpunkt t. Wir haben $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und als Wahrscheinlichkeitsmaß nehmen wir $\mathbb{P}(\omega_i) > 0 \forall i$ an.
Sei zunächst $m = 5/4$.

(a) Geben Sie eine Arbitragemöglichkeit an.

Sei nun $m = 2$.

(b) Sei $\xi = (3/2 - S_1^{(1)})^+$. Überzeugen Sie sich davon, dass $x = (2/3, -1/2)$ ein duplizierendes Portfolio von ξ ist.

(c) Geben Sie den Hedging-Preis von ξ an.

(c) Sei (S^0, S^1) ein EPM auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ mit Zinssatz $r = 0$, $S_0^0 = 1$ und einer Aktie mit $S_0^1 = 1$. Es sei $\mathbb{P} = Poi(1)$ und $S_1^1(k) = k$.

- Ist das Modell arbitragefrei? Ist es vollständig? Geben Sie ein ÄMM an, falls existent.
- Zeigen Sie, dass auch $\mathbb{Q} = Geo(\frac{1}{2})$ mit $\mathbb{Q}(\{k\}) = (\frac{1}{2})^{k+1}$ ein ÄMM ist.
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\xi$ für eine Call-Option ξ mit Ausübungspreis $K = 3$ für die beiden obigen ÄMM. Wieso erhält man nicht dasselbe Ergebnis? Welche Voraussetzung des Satzes über das Gesetz von einem Preis (law of one price) ist verletzt?

(d) Es sei ein Mehrperiodenmodell $(S_t^0, S_t^1)_{t=0,...,T}$ gegeben mit $S_0 = (1, 1)$. Es sei weiterhin $S_t^0 = 1$ für alle $t = 0, ..., T$.

- Welche der folgenden Prozesse sind vorhersehbar bzw. im Allgemeinen nicht vorhersehbar?
  - $\phi_t^1 = \mathbb{1}_{\{S_t^1 > S_{t-1}^1\}}$.

- $\phi_1^1 = 1$, $\phi_t^1 = \mathbb{1}_{\{S^1_{t-1} > S^1_{t-2}\}}$ $(t \geq 2)$.
- $\phi_t^1 = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{t > t_0\}}$ mit $A \in \mathcal{F}_{t_0}$, $t_0 \in \{0, ..., T\}$.
- $\phi_t^1 = \mathbb{1}_{\{S^1_t > S^1_0\}}$.

- Konstruieren Sie aus den vorhersehbaren ϕ^1 ein selbstfinanzierendes Portfolio $\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1)$ mit $V_0(\phi) = 1$. Beschreiben Sie die entsprechenden Portfolios kurz verbal (was wird gemacht, wie wird gehandelt?).

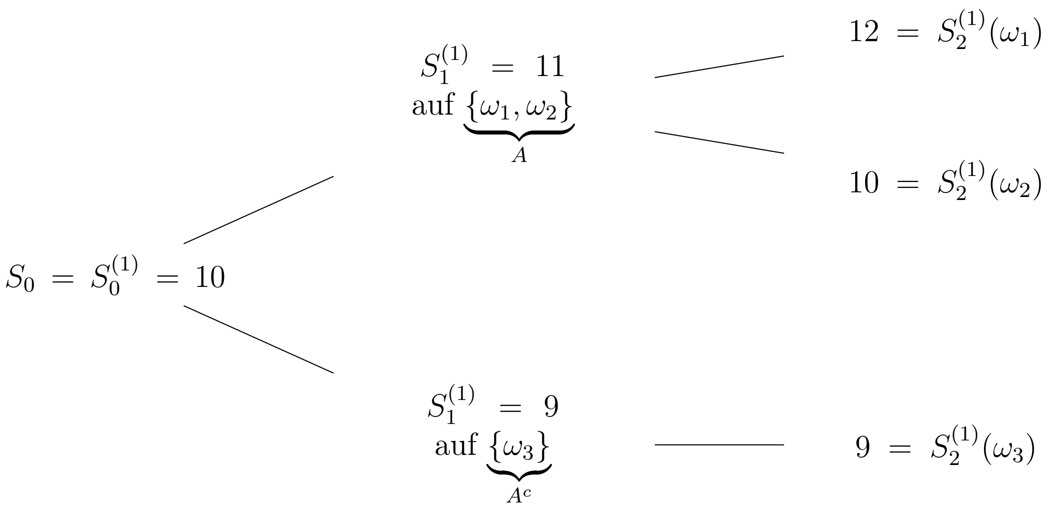
(e) Sei ein MPM gegeben mit $T = 2$, $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_4\}$, $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für alle $i \in \{1, ..., 4\}$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(\{\omega_1, \omega_2\})$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$, sowie Zinssatz $r = 0$, $S_t^0 = 1$,

$$S_0^1 = 5, \qquad S_1^1(\omega) = \begin{cases} 8, & \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}, \\ 4, & \omega \in \{\omega_3, \omega_4\} \end{cases}, \qquad S_2^1(\omega) = \begin{cases} 10, & \omega = \omega_1 \\ 6, & \omega = \omega_2 \\ 5, & \omega = \omega_3 \\ 2, & \omega = \omega_4 \end{cases}$$

Es sei $\xi = (\max_t\{S_t^1\} - 6)^+$.

- Berechnen Sie ein ÄMM.
- Finden Sie ein duplizierendes Portfolio für ξ.
- Berechnen Sie den fairen Preis für ξ.

(f) Wir betrachten ein zwei-periodisches Modell mit sicherer Anlage $S_t^{(0)} = 1$ (Zins $r = 0$) und einer Aktie $S^{(1)}$. Die möglichen Preisentwicklungen der Aktie sind in dem Baum unten dargestellt.



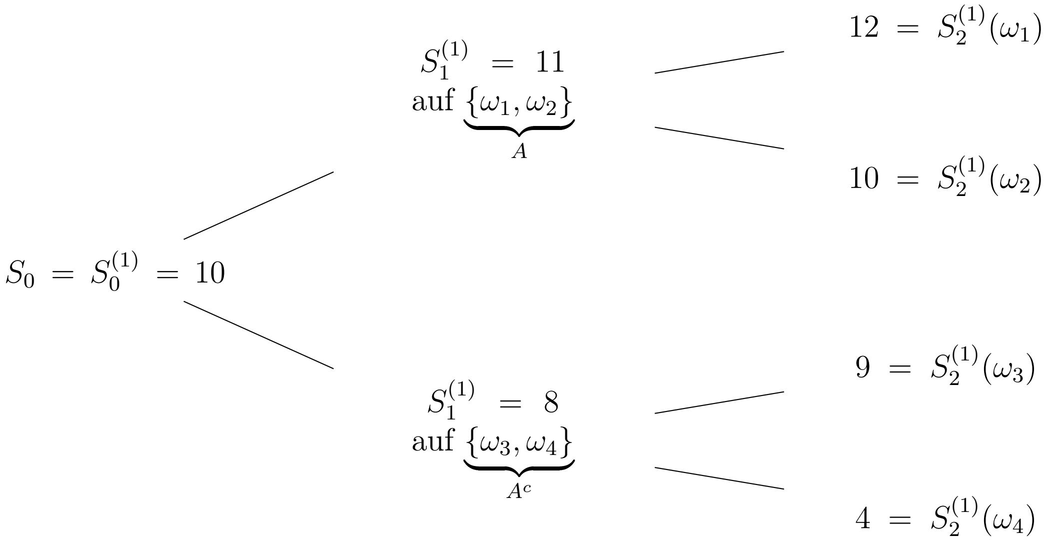
Bezeichne $S_t^{(1)}$ den Preis der Aktie zum Zeitpunkt t. Wir haben $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und als Wahrscheinlichkeitsmaß nehmen wir $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{P}(\omega_i) > 0 \forall i$ an.

(a) Bestimmen Sie die Menge der ÄMM.

(b) Begründen Sie, warum das Modell arbitragefrei und vollständig ist.

(c) Berechnen Sie $\pi(\xi)$ für die Call-Option $\xi = (S_2^{(1)} - 2)^+$.

(g) Wir betrachten ein zwei-periodisches Modell mit sicherer Anlage $S_t^{(0)} = 1$ (Zins $r = 0$) und einer Aktie $S^{(1)}$. Die möglichen Preisentwicklungen der Aktie sind in dem Baum unten dargestellt.



Wir haben $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und als Wahrscheinlichkeitsmaß nehmen wir $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{P}(\omega_i) > 0 \forall i$ an.

(a) Betrachtet wird das Portfolio

$$\phi_1(\omega) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \phi_2(\omega) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}, & \omega \in A, \\ \begin{pmatrix} e \\ -1 \end{pmatrix}, & \omega \in A^c \end{cases}.$$

Berechnen Sie die restlichen Unbekannten, so dass ϕ selbstfinanzierend und ein duplizierendes Portfolio für die europäische Put-Option ξ zum Ausübungspreis 10 auf $S^{(1)}$ ist.

(b) Geben Sie den fairen Preis von ξ an.

(h) Es sei ein CRR-Modell gegeben mit $S_0 = (1, 1)$,

$$l = -0.5, \quad r = 0.05, \quad u = 0.5, \quad T = 2.$$

Berechnen Sie den fairen Preis einer Down-and-In Put-Option der Form

$$C = (K - S_T^1)^+ \mathbb{1}_{\{\min_{0 \le t \le T} S_t^1 \le 0.9\}}, \qquad K = 0.9.$$

(i) Berechnen Sie über das ÄMM in einem allgemeinen CRR-Modell mit $l < r < u$ und $T \in \mathbb{N}$ den fairen Preis eines Forward-Kontrakts $\xi = S^1 - K$ und vereinfachen Sie soweit wie möglich (Ergebnis: $S_0^1 - (1+r)^{-T} K$). Erklären Sie das Ergebnis, indem Sie ein duplizierendes Portfolio angeben und auch hierüber den fairen Preis berechnen.

2 Stetiges MM

Sei stets W eine Brownsche Bewegung.

(a) Zeigen Sie, dass $A_t = W_t^2 - t$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \le t)$ ist. Untersuchen Sie, ob auch $B_t = W_t^3 - 3tW_t$, $C_t = \exp(\frac{1}{2}t)\sin(W_t)$ Martingale sind.

(b) Gegeben sei das Bachelier-Modell ohne Verzinsung, das heißt, es gilt mit $\sigma > 0$, $m, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$dX_t = \sigma dW_t + m dt,$$

Geben Sie X_t an.

(c) Zeigen Sie, dass das Black-Scholes-Modell $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}t)$ die stochastische DGL

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

erfüllt.

(d) Ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess hat die Dynamik (mit $\sigma > 0, \alpha, x_0 \in \mathbb{R}$):

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

Leiten Sie eine explizite Darstellung für X her.
Hinweis: Wenden Sie hierzu die Ito-Formewl auf $Y_t = e^{\alpha t} X_t$ an.

(e) Sei (S_t^0, S_t^1) das Black-Scholes Modell

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \qquad dS_t^1 = \mu S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dW_t.$$

Ermitteln Sie eine stochastische DGL für $\tilde{S}_t^1 = \frac{S_t^1}{S_t^0}$.

(f) Der Wert V_t eines Portfolios im Black-Scholes-Modell erfülle die SDGL

$$dV_t = (r + \theta(\mu - r))V_t dt + \sigma\theta V_t dW_t.$$

Zeigen Sie, dass $M_t = V_t^{1-\gamma}$ für $\gamma = 2(r + \theta(\mu - r))/(\sigma^2\theta^2)$ ein lokales Martingal ist.
Für $\gamma \in (0, 1)$ ist M sogar ein Martingal. Berechnen Sie $\mathbb{E}V_T^{1-\gamma}$ in dieser Situation, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ das Kapital x vorliegt.

(g) Lösen Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = X_t^3 dt - X_t^2 dW_t, \qquad X_0 = 1.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $X_t = F(W_t)$ mit $F(x) = \frac{\alpha}{\beta + x}$ mit $\alpha, \beta > 0$.

(h) Es sei das Black-Scholes-Modell gegeben mit $S_0^0 = S_0^1 = 1$. Es seien $\xi^{put/call}$ die europäischen Put- bzw. Call-Optionen zum Ausübungspreis $K = 1$.

  (a) Sei zunächst $T = 1$, $\sigma = 1$ und $r = 0.5$. Ermitteln Sie den fairen Preis der europäischen Put- und Call-Optionen $\xi^{put/call}$.
  Hinweis: $e^{-0.5} = 0.6065$, $\Phi(1) = 0.8413$.

  (b) Es gelte nun $r = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\pi(\xi^{call}) = 2\Phi(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}) - 1.$$

  Wie verhält sich der faire Preis für steigendes σ bzw. größer werdendes T?

(i) In einem allgemeinen Black-Scholes-Modell mit Parametern μ, σ, r und Brownscher Bewegung W sei der Forward-Kontrakt $\xi = S_T^1 - K$ gegeben. Berechnen Sie über das äquivalente Martingalmaß den fairen Preis $\pi(\xi) = \frac{1}{S_T^0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi]$. Erklären Sie das Ergebnis.
Hinweis: Unter $\mathbb{Q}$ ist $\tilde{W}_t := W_t + (\frac{\mu - r}{\sigma})t$ eine Brownsche Bewegung und $S_T^1 = S_0^1 \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T} \cdot e^{\sigma\tilde{W}_T}$. Es gilt $\mathbb{E}[e^{aZ}] = e^{a^2/2}$ für $Z \sim N(0, 1)$.

(j) Wir betrachten das verallgemeinerte Black-Scholes-Modell

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \qquad dS_t^1 = \mu(t)S_t^1 dt + \sigma(t)S_t^1 dW_t, \qquad t \in [0, T]$$

mit Parameter $\sigma_0, r > 0$ und Funktionen $\sigma : [0, T] \to [\sigma_0, \infty)$, $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass eine explizite Darstellung von S^1 durch

$$S_t^1 = S_0^1 \exp\Big(\int_0^t \sigma(u) dW_u + \int_0^t \{\mu(u) - \frac{\sigma(u)^2}{2}\} du\Big)$$

  gegeben ist.
- Gemäß Novikov's Theorem ist $\mathcal{E}(-\int_0^\cdot \frac{\mu(u)-r}{\sigma(u)} du)$ ein $\mathbb{P}$-Martingal. Folgern Sie, dass

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{\mu(u) - r}{\sigma(u)} du.$$

  ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist.
- Zeigen Sie, dass $\tilde{S}_t^1 = \frac{S_t^1}{S_t^0} = S_0^1 \cdot \mathcal{E}(\int_0^\cdot \sigma(u) d\tilde{W}_u)$.
- Geben Sie eine Formel ohne Erwartungswerte an, um den fairen Preis einer Option $\xi = g(S_T^1)$ zu berechnen.

3 Quantitatives Risikomanagement / Nutzenfunktionen

(a) Es sei $L \sim \text{Pareto}(x_0, \beta)$-verteilt mit $\beta > 1$, $x_0 \geq 1$ und Dichte

$$f(x) = \alpha x_0^{\beta} x^{-\beta-1} \mathbb{1}_{[x_0,\infty)}(x)$$

Berechnen Sie $\text{VaR}_\alpha(L)$ und $ES_\alpha(L)$.

(b) Es sei ein MPM gegeben mit (S^0, S^1), wobei $S_t^0 = 1$ für $t = 1, ..., T$ und S_t^1 eine Aktie. Die Log-Renditen $X_t = \log(\frac{S_t^1}{S_{t-1}^1})$ seien normalverteilt $X_t \sim N(0, \sigma)$, wobei $\sigma = 1$, und es gelte $S_0^1 = 100$. Es sei $\phi_t = (0, 1)$ für alle t.

  (a) Stellen Sie $L_t = -(V_t(\phi) - V_{t-1}(\phi))$ mittels X_t dar.

  (b) Ermitteln Sie $\mathbb{P}(L_t \leq x | \mathcal{F}_{t-1})$.

  (c) Sei nun $t = 1$. Ermitteln Sie

$$VaR_{0.95}(L_1).$$

(c) Gegeben seien die 10 Beobachtungen von Verlusten,

$$22.8 \quad 22.2, \quad 39.7, \quad 16.3, \quad 28.0, \quad 17.1, \quad 89.8, \quad -8.4, \quad 62.0, \quad 20.0.$$

Berechnen Sie die standard-nichtparametrischen Schätzer für $VaR_{0.75}$ und $ES_{0.75}$.

(d) Welche der folgenden Funktionen sind regulär variierend?

$$f(x) = \sqrt{x}\ln(x),$$
$$f(x) = e^{2\ln(\ln(x+1))}$$
$$f(x) = e^{\sqrt{x}} x^2 \ln(x)$$
$$f(x) = x^\alpha \exp(c \cdot (\log t)^\beta), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta < 1, c \in \mathbb{R}.$$

(e) Gegeben seien die $n = 10$ Beobachtungen von Verlusten,

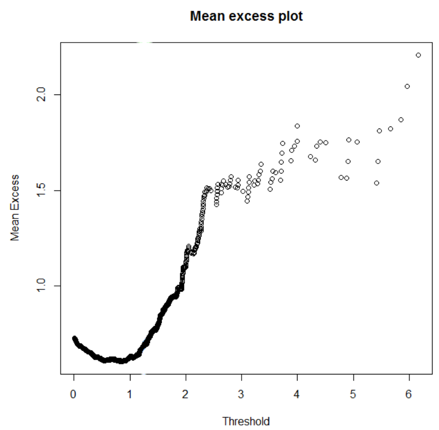
L_i	95.1	112.9	2.8	15.2	79.9	54.0	34.4	-2.4	21.7	63.0
$\ln(L_i)$	4.6	4.7	1.0	2.7	4.4	4.0	3.5	-	3.1	4.1

  (a) Berechnen Sie den Hill-Schätzer $\hat{\rho}$ für ρ mit $k = 4$.

  (b) Angenommen, man erhält $\hat{\rho} = 2.3$. Ermitteln Sie Sie darauf basierend eine Schätzung für $VaR_{0.9}$.

  (c) Ermitteln Sie auf Basis der Formel $ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du$ eine Schätzung für $ES_{0.9}$.

(f) Gegeben sei der folgende mean-excess Plot:



Wählen Sie einen geeigneten Threshold u zur Anwendung der POT-Methode aus.

(g) Gegeben sei ein Einperiodenmodell mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, wobei $S_t^0 = 1$, $S_0^1 = 2$ und

$$S_1^1(\omega_1) = 1, \quad S_1^1(\omega_2) = 2, \quad S_1^1(\omega_3) = 3,$$

und $\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\omega_2)$, $\mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{2}$. Zu Beginn sei $v_0 = 5$.

(a) Ermitteln Sie das erwartungsnutzenoptimale Portfolio sowie das erwartungsnutzenoptimale Vermögen unter der Nutzenfunktion $u(x) = 2\sqrt{x}$.

(b) Ermitteln Sie das Portfolio, welches das Markowitz-Problem der Varianzminimierung für fest vorgegebenes $\mu = 1$ löst.

(c) Ermitteln Sie das Portfolio, welches das Markowitz-Problem der Renditemaximierung für fest vorgegebenes $\sigma = 3$ löst.

(h) Betrachte das Einperiodenmodell mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, wobei $S_t^0 = 1$ und

$$S_0^1 = S_0^2 = 2, \qquad S_1^1(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1 \\ 2, & \omega = \omega_2, \\ 3, & \omega = \omega_3, \end{cases}, \qquad S_1^2(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = \omega_1 \\ 1.5, & \omega = \omega_2, \\ 5, & \omega = \omega_3, \end{cases}.$$

und $\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\omega_2)$, $\mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{2}$. Zu Beginn sei $v_0 = 4$.

(a) Ermitteln Sie ein ÄMM.

(b) Berechnen Sie das erwartungsnutzenoptimale Vermögen unter der Nutzenfunktion $u(x) = 2\sqrt{x}$.

3.1 Lückentext Beispiel (rückwärts)

- Sei $\mu > 0$ und $v_0 \in \mathbb{R}$. Eines der Markowitz-Optimierungsprobleme im Mehrperiodenmodell lautet, die Varianz von $V_T(\phi)$ über alle vorhersagbaren, selbstfinanzierenden Portfolios mit ..... zu minimieren.

- Bei der Block-Maxima-Methode wird genutzt, dass die Verteilung eines Maximums von n i.i.d. Zufallsvariablen, korrekt skaliert, nur gegen eine Frechet-, Weibull- oder .... Verteilung konvergieren kann.

- Der POT-Schätzer nutzt aus, dass die Überschussverteilung zumindest für große Argumente u einer ..... Verteilung folgt.

- Eine Funktion h heißt regulär variierend bei ∞ mit Index $\rho \in \mathbb{R}$, falls ....

- Ist $VaR_{0.99}(L) \geq 100$, so gilt in jedem Fall auch $ES_{0.99}(L) \geq$ .....

- In einem stetigen Finanzmarktmodell mit Basisgütern $(S_t)_{t\in[0,T]}$ heißt ein Portfolio $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ genau dann selbstfinanzierend, wenn für alle $t \in [0,T]$ gilt: $V_t(\phi) = ...$

- Der 2. Hauptsatz im stetigen Finanzmarktmodell besagt, dass im Modell genau dann ein eindeutigen ÄMM existiert, wenn das Modell .....

- Ein vorhersagbares Portfolio ϕ in einem stetigen Finanzmarktmodell mit Basisgütern $(S_t)_{t\in[0,T]}$ heißt zulässig, falls ...

- In einem stetigen Finanzmarktmodell müssen die Basisgüter nicht einfach nur stochastische Prozesse, sondern ... bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ sein.

- Der quadratische Variationsprozess des deterministischen Prozesses $X_t = t^2 - \sin(t)$ lautet $\langle X \rangle_t = ...$
- Ist $(W_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, so heißt $X_t = \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}t)$: ....
- Wird der Ausübungspreis einer europäischen Call-Option erhöht, so ..... (steigt/fällt) ihr fairer Preis.
- Ist $(S_t)_{t=0,...,T}$ ein CRR-Modell mit Parametern r (Zins) und $l < r < u$, so ist das ÄMM gegeben durch $\mathbb{Q}(\{\omega_1, ..., \omega_T\}) = q^{D_T(\omega)}(1-q)^{T-D_T(\omega)}$ mit $q =$....
- Ist in einem Mehrperiodenmodell ein bedingter europäischer Kontrakt ξ gegeben und ψ, ϕ zwei perfekte Hedges für ξ, so gilt zwischen den Ausdrücken $V_0(\phi), V_0(\psi)$ die Beziehung ....
- Der erste Hauptsatz im Einperiodenmodell besagt, dass ein Modell genau dann arbitrage frei ist, falls ....