1 Elementares

Aufgabe 1.1. Drei Glühlampen L_1, L_2 und L_3 verschiedenen Fabrikats haben jeweils die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 mindestens ein Jahr lang zu brennen. Man berechne unter der Annahme der Unabhängigkeit der Brenndauer der Glühlampen die Wahrscheinlichkeit, dass...

(a) genau zwei Lampen mehr als ein Jahr lang brennen.

(b) mindestens zwei Lampen mehr als ein Jahr lang brennen.

(c) höchstens zwei Lampen mehr als ein Jahr brennen.

(d) mindestens eine Lampe mehr als ein Jahr lang brennt.

(e) keine Glühlampe mehr als ein Jahr lang brennt.

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 1.2. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$:

(a) $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(b) $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B$: $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

(d) Seien $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Aufgabe 1.3. Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0.4$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(B)$.

Aufgabe 1.4. Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.
Zeigen Sie, dass $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$, und geben Sie entsprechende Schranken $a, b \in \mathbb{R}$ für $a \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq b$ an, wobei a maximal und b minimal gewählt werden sollten.

Aufgabe 1.5. * Sei $\mathbb{Q}$ ein endlich additives Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ d. h. für alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, A_i paarweise disjunkt, gilt $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Zeigen Sie, dass für $\mathbb{Q}$ die σ-Additivität und die Stetigkeit von unten äquivalent sind:

$$\begin{aligned} & \forall A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \text{ mit } A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}: && \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(A_i) \\ \iff \quad & \forall A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \text{ mit } A_n \text{ paarweise disjunkt}: && \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 2.1. Es sei $(B_j)_{j\in\{1,\dots,n\}} \subseteq \mathcal{A}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $\mathbb{P}(B_i) > 0$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Zeigen Sie die **Formel von Bayes**:
Für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j)} \quad \forall i = 1,\dots,n$$

Aufgabe 2.2. Seien A, B Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0.5$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4$, sowie $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.8$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A\backslash B)$ und $\mathbb{P}(B|A)$

Aufgabe 2.3. Seien A, B Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(B^c) = \frac{4}{5}$, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}$

(a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse A und B nicht stochastisch unabhängig sind.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

(i) $\mathbb{P}(A \cup B)$,

(ii) $\mathbb{P}(A^c|B^c)$,

(iii) $\mathbb{P}(A\backslash B)$.

Aufgabe 2.4. Howard Wolowitz hat eine Erdnussallergie. Bei Verzehr von Erdnüssen tritt bei ihm mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% eine allergische Reaktion auf. Bei Verzehr von Nahrung, die nachweislich frei von Erdnussallergenen ist, tritt bei ihm mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% eine allergische Reaktion auf. Eine bestimmte Schokolade kann Spuren von Erdnüssen enthalten. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Erdnussallergene enthält, beträgt 6%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Schokolade Erdnüsse, gegeben Howard Wolowitz hat nach dem Verzehr eine allergische Reaktion? (Beschreiben Sie zuerst die konkreten Ereignisse, mit denen Sie rechnen!)

Aufgabe 2.5. In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut, die im Falle eines Einbruchs mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die Polizei alarmiert. In einer Nacht ohne Einbruch wird mit Wahrscheinlichkeit 0.002 ein Fehlalarm ausgelöst (z. B. durch eine Maus). Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht beträgt 0.0005. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Einbruch im Gange?

3 Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Aufgabe 3.1. Sei $X \sim \text{Pareto}(\alpha, x_m)$ mit Parametern $\alpha, x_m > 0$. Die Dichte ist gegeben durch $f_X(x) = C_{\alpha,x_m} \cdot x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x \geq x_m\}}$.

(a) Bestimmen Sie C_{α,x_m} so, dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F^X(x)$ von X.

(c) Welche bekannte Verteilung besitzt $Y := \log(\frac{X}{x_m})$?

(d) Sei nun $\alpha = x_m = 1$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$ und $\mathbb{P}(X > 2)$.

Aufgabe 3.2. Sei $f(x) = c \cdot x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $a, b > 0$, die Dichte einer $\Gamma(a, b)$-Verteilung.

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$, sodass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt
Hinweis: Verwenden Sie die Gammafunktion $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$.

(b) * Zeigen Sie, dass für $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(c) Zeigen Sie die Momentenformel für Normalverteilungen:
$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{E}\left[X^{2k}\right] = \frac{2^k \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ und $\mathbb{E}\left[X^{2k-1}\right] = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 3.3. Seien (X, Y) gemeinsam stetig verteilt mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x, y) = c \cdot e^{-(x+2y)} \mathbb{1}_{\{x,y \geq 0\}}.$$

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$, sowie $\mathbb{E}[X]$. Sind X, Y unabhängig?

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X > Y)$.

Aufgabe 3.4. Seien (X, Y) gemeinsam stetig verteilt mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x, y) = c \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^3}\right) \mathbb{1}_{\{1 \leq x, y \leq 2\}}.$$

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Randdichte $f_X(x)$ und die Verteilungsfunktion $F^X(x)$ von X.

(c) Berechnen Sie das 0.75-Quantil von X.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > Y)$.

Aufgabe 3.5. Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in den natürlichen Zahlen und $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
Berechnen Sie die folgenden Werte und vereinfachen Sie sie soweit wie möglich:

(a) $\mathbb{P}(\min(X, Y) \leq i)$, $i \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben,

(b) $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X \text{ teilt } Y)$,

(c) $\mathbb{E}[X], \operatorname{Kov}(X, Y)$, $\mathbb{E}[X \cdot Y]$, $\mathbb{E}\left[2^{-X}\right]$, ein 0.25-Quantil von X.

(d) Geben Sie die Zähldichte von $X + Y$ an.

4 Approximationen und Abschätzungen

Aufgabe 4.1. Bei einer Werbeaktion eines Versandhauses sollen die ersten 968 Einsender einer Bestellung eine Damen- bzw. Herrenarmbanduhr als Geschenk erhalten. Nehmen Sie an, dass sich beide Geschlechter gleichermaßen von dem Angebot angesprochen fühlen, d. h. dass die Einsender jeweils unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit männlich oder weiblich sind. Wie viele Damen- und wie vielen Herrenarmbanduhren sollte das Kaufhaus vorrätig halten, so dass mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% all 968 Einsender eine passende Uhr erhalten? Verwenden Sie

a) die Tschebyscheff-Ungleichung,
Hinweis: Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die benötigte Anzahl von Damenarmbanduhren um mindestens k von 484 abweicht.

b) die Normalapproximation.
Hinweis: Folgende Quantile der Standardnormalverteilung stehen Ihnen zur Verfügung:
$q_{0.98} = \frac{31.89}{\sqrt{242}}$, $q_{0.99} = \frac{36.25}{\sqrt{242}}$

Aufgabe 4.2. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit stetiger Wahrscheinlichkeitsdichte f und Verteilungsfunktion F. Sei $\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \le x\}}$ die empirische Verteilungsfunktion.
Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, und

$$\hat{f}_n(x) := \frac{\hat{F}_n(x+b_n) - \hat{F}_n(x)}{b_n}$$

ein Schätzer der Dichte f an der Stelle $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass $\hat{f}_n(x) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(x)$, falls die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaften $b_n \to 0$ und $nb_n \to \infty$ erfüllt.

Aufgabe 4.3. (Die Macht entschlossener Minderheiten)
Eine Million Wähler/innen müssen sich zwischen zwei Kandidat/innen A und B entscheiden. Eine Minderheit von tausend Wähler/innen hat sich bereits für Kandidat A entschieden, die restlichen Wähler/innen entscheiden sich zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit für Kandidat A oder B. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kandidat/in A gewinnt.
Hinweis: Für einer standardnormalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt: $\mathbb{P}(Z \le -1) \approx 0.16$.

Aufgabe 4.4. Seien $X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ zwei unabhängige Zufallsvariablen. Berechnen Sie einmal exakt $\mathbb{P}(|X-Y| \ge \frac{1}{2})$ und geben Sie einmal eine Abschätzung nach oben mittels der Tschebyscheff-Ungleichung.

Aufgabe 4.5. Ein Obsthändler weiß, dass in jeder Lieferung 5% der Bananen faul sind. Geben Sie eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste mit 240 Bananen mindestens 6 und höchstens 18 Bananen faul sind.

Aufgabe 4.6. Es sei $E := \{(x,y) \in [0,1]^2 : x^2 \le y\}$ die Fläche oberhalb der Normalparabel im Einheitsquadrat. Zur Berechnung der Fläche wird folgende Methode vorgeschlagen: Es werden auf

[0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} U[0,1]$ generiert, mit denen der Schätzer $\hat{A}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{(X_i, Y_i)\in E\}}$ berechnet wird. Berechnen Sie mittels der Tschebyscheff-Ungleichung die Anzahl der Zufallsvariablen n, die benötigt wird, damit $\hat{A}_n$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% höchstens um 0.01 vom wahren Wert des Integrals abweicht.

5 Transformation von Zufallsvariablen

Aufgabe 5.1. Seien $X \sim \operatorname{Exp}(\theta)$ und $Y \sim \operatorname{Exp}(\theta')$ voneinander unabhängige Zufallsvariablen, wobei $\theta, \theta' > 0$.
Zeigen Sie, dass $\min(X, Y) \sim \operatorname{Exp}(\theta + \theta')$ gilt.

Aufgabe 5.2. Die Zufallsgröße $X \sim U[0,1]$ sei gleichverteilt auf [0,1], die Zufallsgröße $Y \sim \operatorname{Exp}(1)$ sei exponentialverteilt, und beide seien unabhängig. Ferner sei $U = 3X + 1$ und $V = \min\{X, Y\}$.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Verteilung von U.

(b) Wie groß sind die Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$ und $\rho(X, U)$?

(c) Welche Werte nimmt V an? Bestimmen Sie Verteilungs- und Dichtefunktion von V.

Aufgabe 5.3. * Seien $X \sim \operatorname{Geo}(\theta)$, $Y \sim \operatorname{Geo}(\theta')$ voneinander unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $\min(X, Y) \sim \operatorname{Geo}(q)$ gilt, und geben Sie q an.
Hinweis: Verwenden Sie, dass die Verteilungsfunktion von $X \sim Geo(p)$ gegeben ist durch $F(k) = 1 - (1-p)^k$

Aufgabe 5.4. Seien $X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Geo}(p)$ geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass dann die Zufallsvariablen $U = \min(X, Y)$ und $V = X - Y$ unabhängig sind und berechnen Sie die Zähldichten von U, V.

Aufgabe 5.5. $X_1 \dots X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Frechet}(\alpha, \beta)$, wobei die Frechet-Verteilung $\operatorname{Frechet}(\alpha, \beta)$ gegeben ist durch die Verteilungsfunktion $F(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.
Welche Verteilung besitzt $\max(X_1, \dots, X_n)$?

Aufgabe 5.6. *

a) Sei $X \sim U[0,1]$, welche bekannte Verteilung besitzt $Y := -2\log(X)$?

b) Sei $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda), \lambda > 0$, welche bekannte Verteilung besitzt $Y := \alpha X, \alpha > 0$?

c) Sei $X \sim U[-1,1]$. Berechnen Sie die Dichte von $Y := X^2$.

Aufgabe 5.7. * Seien $X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} U[0,1]$. Definiere $U := \min(X, Y)$, $V := \max(X, Y)$, bestimmen Sie $\mathbb{E}[U]$ und $\operatorname{Kov}(U, V)$.
Hinweis: Betrachten Sie für die Kovarianz Kov($U + V, U + V$) und verwenden Sie die Unabhängigkeit von X und Y.

Aufgabe 5.8. Seien $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, dann ist $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der χ_n^2-Verteilung.
Hinweis: Verwenden Sie für die Varianz Aufgabe 3.2 und $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

6 Konvergenz von Zufallsvariablen

Aufgabe 6.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = n^\alpha) = \frac{1}{n}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $X_n \stackrel{\mathcal{D}}{\to} 0$ bzw. $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} 0$ bzw. $X_n \stackrel{(2)}{\to} 0$?

Aufgabe 6.2. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen mit $X_n \stackrel{(2)}{\to} X$ folgt, dass $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X$.

Aufgabe 6.3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 2^n) = \frac{1}{2^n}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gibt es Zufallsvariablen Z mit $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, bzw. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$, bzw. $X_n \xrightarrow{(2)} Z$?

Aufgabe 6.4. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zufallsvariablen mit Dichten

$$f_{X_n}(x) = ne^{-nx} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad f_{Y_n}(x) = \frac{n+1}{n} x^{\frac{1}{n}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass X_n und Y_n in Verteilung konvergieren und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.

(b) Kann man etwas über die Konvergenz in Verteilung von $X_n + Y_n$ und $X_n \cdot Y_n$ sagen?

Aufgabe 6.5. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen.

(a) Es sei $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$. Zeigen Sie im Detail, dass $\frac{1}{\sqrt{n}\log(n)} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\mathbb{P}}{\to} 0$.

(b) Sei nun $X_1 \sim U[0,1]$ gleichverteilt auf [0,1]. Zeigen Sie, dass $Z_n := n \cdot \min(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{\mathcal{D}}{\to} Z$ mit einer Zufallsvariable Z und geben Sie die Verteilung von Z an.

Aufgabe 6.6. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) > 0$, $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}}{\sqrt{S^2}} \stackrel{\mathcal{D}}{\to} \mathcal{N}(0,1)$, wobei $S^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

Aufgabe 6.7. Sei $X \sim U[0,1]$. Überprüfen Sie, ob $Y_n := 2^{\frac{n}{2}} \mathbb{1}_{[0,2^{-n}]}(X)$ stochastisch und/oder im quadratischen Mittel konvergiert.

Aufgabe 6.8. * Seien $U \sim \mathrm{Exp}(1)$ und $V \sim \mathrm{Pareto}(1,1)$ mit $f_V(v) = \frac{1}{v^2}\mathbb{1}_{[1,\infty]}(v)$.
Überprüfen Sie, ob $X_n := n \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(U)$, sowie $Y_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(V)$

(a) stochastisch gegen einen Grenzwert konvergieren.

(b) im quadratischen Mittel gegen einen Grenzwert konvergieren.

Aufgabe 6.9. * Zeigen Sie, dass der Grenzwert von stochastischer Konvergenz fast sicher eindeutig ist, also für $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X, X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} Y$ gilt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Aufgabe 6.10. Es seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und X_n Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$.

a) Zeigen Sie, dass $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} 0$ genau dann, wenn $p_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Konvergiert X_n auch im quadratischen Mittel, wenn X_n stochastisch konvergiert?

7 Statistische Tests

Aufgabe 7.1. Seien $X_1 \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Beta}(\theta)$ Beta-verteilt mit Parameter $\theta > 0$ und Dichten

$$f_\theta(x) = \theta \cdot x^{\theta-1} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Wir wollen auf die Hypothesen $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$ testen.

(a) Zeigen Sie, dass ein gleichmäßig bester Test für diese Hypothesen zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ durch

$$\phi^*(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n \log(X_i) > c_n \\ 0, & \sum_{i=1}^n \log(X_i) \le c_n \end{cases}$$

gegeben ist, wobei c_n geeignet gewählt werden muss.

(b) Zeigen Sie, dass $-2\theta \log(X_1) \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$.

(c) Nutzen Sie ohne Beweis, dass $\text{Exp}(\frac{1}{2}) = \chi^2_2$ und geben Sie damit c_n aus (a) an.

(d) Wir beobachten nun folgende $n = 10$ Realisierungen von $\log(X_i), i = 1, \dots, n$:

-0.2	-0.4	-0.2	-0.2	-0.4	-0.3	-0.2	-0.3	-0.3	-0.3

und vermuten $\theta_0 = 1$. Wie lautet das Testergebnis?
Quantile der χ^2-Verteilung: $\chi^2_{2,0.05} = 0.103, \chi^2_{2,0.95} = 5.991, \chi^2_{20,0.05} = 10.85, \chi^2_{20,0.95} = 31.41$

Aufgabe 7.2. Die Jahreshöchststände (in m) der Elbe in Dresden können mit einer stetigen Extremwertverteilung, der sogenannten Frechet-Verteilung modelliert werden. Diese hat die Verteilungsfunktion

$$F_\beta(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-q}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Wir nehmen an, dass der Parameter $q > 0$ bekannt ist. Die Unsicherheit wird durch den Parameter $\beta > 0$ ausgedrückt. Ein Stadtbeamter behauptet, dass für die Elbe $\beta = \beta_0 = 5$ gilt. Wir sind skeptisch und denken, dass der wahre Wert von β kleiner ist. Dafür nehmen wir an, dass die Jahreshöchststände der Elbe in verschiedenen Jahren unabhängig sind und legen unseren Untersuchungen die Werte X_i (in m, $i = 1, \dots, 9$) von den Jahren 2005 bis 2013 zugrunde:

X_i	3.9	3.6	3.2	3.1	2.7	4.0	3.4	5.9	2.1
X_i^{-3}	0.016	0.022	0.031	0.035	0.050	0.016	0.026	0.005	0.108

(a) Formulieren Sie für obiges Testproblem die Null- und Alternativhypothese. Geben Sie einen gleichmäßig besten Test für die Hypothesen zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ an. Hierbei soll der peinliche Fehler, dass der Stadtbeamte fälschlicherweise beschuldigt wird, dem Fehler 1. Art entsprechen.

(b) Es sei nun $q = 3$ bekannt. Es ist weiter bekannt, dass für $X_1, \dots X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Frechet}(q, \beta)$ gilt: $2\sum_{i=1}^n (X_i/\beta)^{-q} \sim Z_n$ ist Z_n-verteilt. Wie lautet Ihre Testentscheidung zum Niveau $\alpha = 0.05$?
Quantile der Z_n-Verteilung: $Z_{9,0.05} = 9.39, Z_{9,0.95} = 28.87$.

Aufgabe 7.3. Der Hersteller der Waschmaschine „Perlweiß“ behauptet, dass pro Waschgang höchstens $\mu_0 = 5$ Liter benötigt werden. Wir sind skeptisch und glauben, dass mehr als 5 Liter verbraucht werden und wollen dies dem Hersteller nachweisen. Wir nehmen an, dass die verbrauchte Wassermenge pro Waschgang normalverteilt ist mit Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ. Für unsere Untersuchung haben wir $n = 9$ mal exakt den gleichen Waschgang gestartet und mit einer raffinierten Methode den Wasserverbrauch gemessen. Wir erhielten folgende Ergebnisse (in Litern):

4.6	4.4	5.5	6.0	5.4	6.5	5.7	6.2	6.1

(a) Formulieren Sie für obiges Testproblem die Null- und Alternativhypothese und führen Sie einen geeigneten Test durch. Hierbei soll der peinliche Fehler, dass der Hersteller fälschlicherweise beschuldigt wird, höchstens 5 % betragen.

(b) Geben Sie ein 95 %-Konfindenzintervall für den Erwartungswert an.
Hinweis: $\overline{X_n} = 5.6$*, Quantile der t-Verteilung:* $t_{8,0.95} = 1.860$, $t_{9,0.95} = 1.833$

Aufgabe 7.4. Ein Hersteller behauptet von seinen Glühbirnen, dass diese 10 Kilostunden lang Licht spenden, ehe sie durchbrennen. Wir sind skeptisch und vermuten, dass die wahre Lebensdauer der Glühbirnen geringer ist. Für eine statistische Untersuchung nehmen wir an, dass die Lebensdauer (in Kilostunden) einer Glühbirne Exponential-verteilt ist mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$, wobei in dieser Modellierung (vgl. Erwartungswert einer Exponentialverteilung) dann $\frac{1}{\lambda}$ für die mittlere Lebensdauer steht. Wir kaufen $n = 10$ Glühbirnen und erhalten folgende Lebensdauern (in 1000 Stunden):

8.2	4.4	7.3	5.1	10.2	12.6	5.5	9.3	7.1	3.8

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$ Exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Nutzen Sie das auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinerte Neyman-Pearson Lemma, um einen besten Test $\phi^* : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ für die einfachen Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

mit $\lambda_1 > \lambda_0$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ anzugeben.

(b) Vereinfachen Sie ϕ^*, indem Sie zeigen, dass der Likelihood-Quotient monoton ist. Folgern Sie, dass ϕ^* sogar gleichmäßig bester Test ist für

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : \lambda > \lambda_0.$$

(c) Zeigen Sie, dass ϕ^* sogar gleichmäßig bester Test ist für

$$H_0' : \lambda \leq \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : \lambda > \lambda_0.$$

Hinweis: Definieren Sie $Z_n := \lambda \cdot \sum_{i=1}^n X_i$*. Überlegen Sie sich, dass die Verteilung von* Z_n *nicht mehr von* λ *abhängt. Zeigen Sie dann, dass* $\mathbb{P}_\lambda(\phi^* = 1) \leq \alpha$ *gilt für* $\lambda \leq \lambda_0$.

(d) Es ist bekannt, dass $Z_n \sim \Gamma(n, 1)$, wobei $\Gamma(n, 1)$ die Gamma-Verteilung bezeichnet. Es bezeichne $\Gamma_{n,1,\alpha}$ das α-Quantil dieser Verteilung. Berechnen Sie c^{**} in Termen von λ_0 und $\Gamma_{n,1,\alpha}$.

(e) Wir drücken nun die Abhängigkeit des Tests ϕ^* von λ_0 explizit aus, indem wir ihn mit $\phi^*_{\lambda_0}$ bezeichnen. Bestimmen Sie den Annahmebereich

$$A(\lambda_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \phi^*_{\lambda_0}(x) = 0\}$$

des Tests und damit ein gleichmäßig bestes $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $S(X)$ für λ. Für welche falschen Parameter wurde dieses Intervall konstruiert?

(f) Sei nun $\alpha = 0.05$. Werden Sie den Hersteller der Glühbirnen auf Basis unserer Beobachtungen und des Tests ϕ^* aus (b) vorwerfen, dass die Angabe der Standardabweichung falsch ist? Geben Sie auf Basis unserer Beobachtungen das 95%−Konfidenzintervall für λ aus (e) an.
Hinweis: $\Gamma_{10,1,0.05} = 5.426, \Gamma_{10,1,0.95} = 15.706$.

Aufgabe 7.5. Sie haben einen Würfel geschenkt bekommen. Auf diesem ist auf 3 Seiten die Farbe „rot“ und auf 3 Seiten die Farbe „schwarz“ gemalt. Sie haben die Vermutung, dass der Würfel gezinkt ist und die Farbe schwarz mit höherer Wahrscheinlichkeit als $p_0 = \frac{1}{2}$ gewürfelt wird. Um ihre Vermutung zu testen, machen sie $n = 5$ unabhängige Versuche:
Jeder Versuch besteht darin, den Würfel solange zu werfen, bis das erste Mal „schwarz“ kommt. Sie notieren die Anzahl X_i der benötigten Würfe und erhalten

X1	X2	X3	X4	X5
2	1	3	5	4

(a) Geben Sie einen gleichmäßig besten Test für das Testproblem an, wobei der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entsprechen soll, dass Sie den Würfel zu Unrecht als gezinkt brandmarken.

(b) Können Sie auf Basis ihrer Ergebnisse zum Niveau $\alpha = 0.05$ nachweisen, dass der Würfel gezinkt ist?

(c) Berechnen Sie den Fehler 2. Art in dem Fall, dass der Würfel tatsächlich gezinkt ist mit Wahrscheinlichkeit $p_1 := 0.6$ für „schwarz“.

Hinweis: Es gilt $\sum_{i=1}^n X_i \sim$ *NegBin*(n, p) *(negative Binomialverteilung). Die Zähldichte* $f_p(k)$ *von NegBin(5, p),* $k \in \mathbb{N}_{\geq 5}$*, erfüllt*

$$\sum_{k<6} f_{p_0}(k) = 0.03, \ \sum_{k<7} f_{p_0}(k) = 0.11, \ \sum_{k<6} f_{p_1}(k) = 0.08, \ \sum_{k<7} f_{p_1}(k) = 0.23.$$

Aufgabe 7.6. Eine Forschergruppe untersucht die Halbwertszeit von ^{60}Co. Die bisher vermutete Halbwertszeit beträgt $\lambda_0 = 5.2714$ Jahre. Die Forscher beobachten nun in $n = 5$ unabhängigen Experimenten Halbwertszeiten

X1	X2	X3	X4	X5
6.0	4.0	6.0	7.0	5.0

In ihrem Modell nehmen sie an, dass $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\frac{1}{\lambda})$.
Die Forscher wollen basierend auf ihren Messungen nachweisen, dass die wahre Halbwertszeit größer als die bisher vermutete ist. Formulieren Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ und entscheiden Sie, ob ein Nachweis einer größeren Halbwertszeit mit den Ergebnissen der Forscher möglich ist.
Hinweis: Das 0.95-Quantil der $\Gamma(5, \frac{1}{\lambda_0})$*-Verteilung ist* $\Gamma(5, \frac{1}{\lambda_0}, 0.95) = 48.25$.

Aufgabe 7.7. Auf der Packung eines Feuerwerks der Marke „Superböller" steht geschrieben, dass die durchschnittliche Lautstärke höchstens $\mu_0 = 100$ Dezibel beträgt. Wie sind skeptisch und vermuten, dass die durchschnittliche Lautstärke höher ist. Dies wollen wir dem Hersteller nachweisen. Dazu nehmen wir an, dass die Lautstärke beim Abbrennen eines Böllers normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ (entspricht der durchschnittlichen Lautstärke) und unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Unter strenger Aufsicht zünden wir nun $n = 10$ der „Superböller"-Feuerwerke unabhängig voneinander an und messen folgende Lautstärken (in Dezibel):

112.0	105.2	98.1	108.7	97.2	102.3	110.1	100.5	103.3	99.0

(a) Formulieren Sie zunächst die Hypothesen für das Testproblem, so dass der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entspricht, dass wir den Hersteller zu Unrecht beschuldigen. Führen Sie dann einen Student'schen t-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und formulieren Sie das Ergebnis der Testentscheidung.

(b) Sei $\alpha \in (0,1)$. Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ die empirische Stichprobenvarianz. Zeigen Sie, dass das Intervall

$$B(X_1, ..., X_n) := \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ ist.

(c) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lautstärke μ des Feuerwerks „Superböller" basierend auf unseren Beobachtungen an.
Hinweis: Hier sind einige Quantile der t-Verteilung: $t_{9,0.95} = 1.833, t_{10,0.95} = 1.812, t_{9,0.975} = 2.262, t_{10,0.975} = 2.228$.

Aufgabe 7.8. Laut dem Händler eines Feuerwerkgeschäfts fliegen die Raketen des Typs „Barock" mindestens genauso hoch wie Raketen des Typs „Renaissance". Wir wollen diese Aussage überprüfen und kaufen dazu 8 „Barock"- und 12 „Renaissance"-Raketen. Für unsere Nachforschung nehmen wir an, dass für beide Typen die Flughöhe normalverteilt ist mit einer mittleren Flughöhe μ_B („Barock") bzw. μ_R („Renaissance") und gleicher, unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Wir messen folgende Flughöhen (in Metern) bei unseren Raketen:

„Barock"	39.7	47.5	37.4	46.6	40.2	48.4	39.0	37.2				
„Renaissance"	47.0	39.2	45.5	38.7	43.0	43.1	40.4	45.0	43.4	48.6	45.7	43.8

Führen Sie einen Zweistichproben t-Test (Satz 13.11) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und entscheiden Sie, ob wir dem Händler bzgl. der Flughöhe der beiden Raketentypen vertrauen sollten oder nicht. Hierbei sollte der Fehler 1. Art dem peinlichen Fehler entsprechen, dem Händler zu misstrauen, obwohl er Recht hat.
Hinweis: Quantile der t-Verteilung: $t_{18,0.95} = 1.734, t_{19,0.95} = 1.729, t_{20,0.95} = 1.725$.

8 Maximum-Likelihood-Schätzer

Aufgabe 8.1. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Beta}(\theta, 1)$ Beta-verteilt mit stetiger Dichte

$$f_\theta(x) = c(\theta) \cdot x^{\theta-1} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

und Parameter $\theta > 0$.

(a) Zeigen Sie im Detail, dass f_θ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, wobei $c(\theta)$ geeignet zu bestimmen ist.

(b) Zeigen Sie, dass $-\log(X_1) \sim \text{Exp}(\theta)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\hat{\theta}_n := -n \cdot (\sum_{i=1}^n \log(X_i))^{-1}$ ein konsistenter Schätzer für θ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}(\overline{X_n} - \frac{\theta}{\theta+1}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit geeignetem σ^2.

Aufgabe 8.2. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.
Zeigen Sie:

(a) Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}_n$ von λ ist durch $\overline{X_n}$ gegeben.

(b) $\hat{\lambda}_n$ ist ein konsistenter und erwartungstreuer Schätzer für λ.

(c) $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \lambda)$.

(d) Sei $\alpha \in (0, 1)$.

$$S(X_1, \ldots, X_n) := \left[\hat{\lambda}_n - \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_n}u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \hat{\lambda}_n + \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_n}u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right] \text{ und } T(X_1, \ldots, X_n) := \left[\hat{\lambda}_n - \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_n}u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}, \ \infty\right)$$

sind asymptotische $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle für λ.

Aufgabe 8.3. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit Parameter $\sigma > 0$.

(a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\sigma}_n^2$ für σ^2.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\sigma}_n^2$ ein konsistenter und erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4)$.
Hinweis: $\mathbb{E}[X_1^4] = 3\sigma^4$

(d) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Berechnen Sie ein asymptotisches $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für σ^2 für die richtigen Parameter $\mathcal{R}_{\sigma^2} = [\sigma^2, \infty)$. Können Sie auch ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für σ angeben?

Aufgabe 8.4. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U[0, \theta]$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$.

(a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_n$ für $\theta > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\theta}_n$ ein konsistenter Schätzer ist.

(c) Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $n(\hat{\theta}_n - \theta)$.

Aufgabe 8.5. Bestimmen Sie jeweils den Maximum-Likelihood-Schätzer und zeigen Sie Konsistenz.

(a) $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \mu)$ für $\mu > 0$

(b) $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Geo}(p)$ für $p \in (0,1)$

(c) $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{NB}(r, p)$ für $p \in (0,1)$ mit bekanntem $r \in \mathbb{N}$
Die Zähldichte von $\operatorname{NB}(r, p)$ lautet $f_p(x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot (1-p)^{x-r} \cdot p^r$ für $x \in \mathbb{N}, x \geq r$. Es gilt $\mathbb{E}X_1 = \frac{r}{p}$.

(d) $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Exp}(\lambda)$ für $\lambda > 0$

Aufgabe 8.6. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Frechet}(\alpha, \beta)$ mit Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, wobei die Dichte gegeben ist durch

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Es ist $\mathbb{E}\left[X_1^{-\alpha k}\right] = k! \cdot \beta^{-k\alpha}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass uns $\alpha > 0$ bekannt ist.

(a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\beta}_n$ für $\beta > 0$.
Kontrollergebnis: $\hat{\beta}_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i^{\alpha}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$

(b) Berechnen Sie $\sigma > 0$, so dass $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ gilt.
Hinweis: Benutzen Sie die Delta-Methode.

(c) Berechnen Sie die Fisher-Information von $I(\beta)$ von β für eine Beobachtung. Ist $\hat{\beta}_n$ asymptotisch Fisher-effizient?

Aufgabe 8.7. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Rayleigh}(\sigma)$-verteilt mit Parameter $\sigma > 0$ und Wahrscheinlichkeitsdichten

$$f_\sigma(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

(a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\sigma}_n(X_1, \ldots, X_n)$ von σ.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\sigma}_n$ ein konsistenter Schätzer für σ ist.
Hinweis: Es gilt $\mathbb{E}[X_1] = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, *Var*$(X_1) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$ *und* $\mathbb{E}[X_1^4] = 8\sigma^4$.

(c) Berechnen Sie die Fisher-Informationsmatrix $I(\sigma)$ von σ auf Basis einer Beobachtung X_1.

(d) Zeigen Sie, dass $\hat{\sigma}_n$ ein asymptotisch Fisher-effizienter Schätzer ist.

Aufgabe 8.8. Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Bin}(m, p)$ unabhängige und identisch Binomial-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $m \geq 1$ und $p \in (0,1)$. Die Zähldichte der Binomial-Verteilung mit Parametern (m, p) ist gegeben durch

$$p(k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \quad \text{für } k \in \{0, \ldots, m\}.$$

Außerdem gilt $\mathbb{E}[X_1] = m \cdot p$ und $\operatorname{Var}(X_1) = m \cdot p \cdot (1-p)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}_n$ von p basierend auf $X_1, \ldots, X_n$ für bekanntes m durch $\hat{p}_n = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n X_i$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{p}_n$ ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für p ist.

(c) Weisen Sie nach, dass zudem $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \frac{p(1-p)}{m})$ für $n \to \infty$ gilt.

Aufgabe 8.9. Wir haben zwei Beutel, die jeweils prall mit Glühbirnen der Marke „Lichtschwemme“ bzw. „Dunkelfunzel“ gefüllt sind. Wir gehen davon aus, dass die Leuchtdauern der Glühbirnen der beiden Marken exponentialverteilt sind mit Parametern λ und λ^{-1}, wobei $\lambda > 0$. Wir ziehen nun aus beiden Beuteln unabhängig voneinander n Glühbirnen und messen die Leuchtdauern $X_1, \ldots, X_n$ („Lichtschwemme“) und $Y_1, \ldots, Y_n$ („Dunkelfunzel“). Berechnen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}_n$ für λ auf Basis von $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$.

Aufgabe 8.10. Um die Anzahl N der Individuen einer Bärenpopulation in einem ihrer Verbreitungsgebiete zu schätzen, werden zunächst s Bären gefangen. Diese werden markiert und wieder in die Freiheit entlassen. Nach einer gewissen Zeitspanne, in der sich markierte und nicht markierte Population durchmischen, werden nochmals n Bären gefangen und die Anzahl der in der zweiten Stichprobe enthaltenen markierten Tiere x bestimmt. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer von N basierend auf ihrer Beobachtung x.
Hinweis: Betrachten Sie die Ungleichung $\frac{p_N(x)}{p_{N+1}(x)} \geq 1$.

9 Bedingte Erwartungswerte

Aufgabe 9.1. Seien X, Y reelle Zufallsvariablen und sei $\operatorname{Var}(Y) < \infty$. Die sogenannte bedingte Varianz von Y gegeben X ist definiert durch

$$\operatorname{Var}(Y|X) := \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2|X\right] = \mathbb{E}\left[Y^2|X\right] - \mathbb{E}[Y|X]^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Var}(Y) = \mathbb{E}[\operatorname{Var}(Y|X)] + \operatorname{Var}(\mathbb{E}[Y|X]).$$

(b) Zeigen Sie, dass der bedingte Erwartungswert $h^*(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ den Abstand

$$\mathbb{E}\left[(Y - h(X))^2\right]$$

unter allen (messbaren) Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ minimiert.

Aufgabe 9.2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y zwei Zufallsvariablen.

(a) Es habe (X, Y) im $\mathbb{R}^2$ die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}\mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X|Y]$ und $\mathbb{E}[Y|X]$.

(b) Sei nun $r, p \in \mathbb{R}$ mit $0 \le r \le p \le 1$ und $1 - 2p + r \ge 0$. Die Verteilungen von X und Y seien gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) &= r, \qquad \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = p - r,\\
\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) &= p - r, \qquad \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1 - 2p + r.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Verteilung von Y und den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X|Y]$.