Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

Präsenzübungen 1 – Lösungen

Aufgabe P1 (Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ und $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$ mit $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(b) **De Morgansche Regeln**: $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$, und $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$

(c) Mit der Definition $\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ gilt: $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
Hinweis: Hier darf verwendet werden, dass aus $A \subseteq B$ folgt: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(d) **Stetigkeit des Maßes von oben**:
Gilt $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
Hinweis: Gehen Sie unter Nutzung von (a),(b) zunächst zum Gegenereignis über. Definieren Sie dann $B_n := A_n^c \setminus A_{n-1}^c$, und drücken Sie $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ mittels der B_n aus. Nutzen Sie dann Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Lösung:

(a) Die Vereinigung $A \dot\cup A^c = \Omega$ ist disjunkt. Damit nach den Axiomen (i) und (iii) von Kolmogorov

$$1 \overset{\text{(i)}}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \dot\cup A^c) \overset{\text{(iii)}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \dot\cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \dot\cup (A \cap B) \\ A \triangle B &= (A \setminus B) \dot\cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{P}(A) \overset{\text{(iii)}}{=} \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B), \tag{$*$}$$

$$\mathbb{P}(B) \overset{\text{(iii)}}{=} \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B), \tag{$**$}$$

$$\mathbb{P}(A \triangle B) \overset{\text{(iii)}}{=} \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \overset{(*),(**)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B). \tag{$***$}$$

Außerdem gilt $A \cap B \subset A, B$. Dann folgt mit Aufgabe 1(a)

$$\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A \cap B).$$

Nach $(***)$ gilt damit

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) \geq \begin{cases} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(B) \end{cases} = \begin{cases} \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B). \end{cases}$$

Insgesamt folgt $\mathbb{P}(A \triangle B) \geq |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)|$.

(b) Wir zeigen nur die erste Mengengleichheit. Es ist

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in \Omega \text{ und } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega : x \in A_n, n \in \mathbb{N}\} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \Omega \text{ und } \forall\, n \in \mathbb{N} : x \notin A_n \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \Big(x \in \Omega \text{ und } x \notin A_n\Big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : x \in A_n^c \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c.
\end{aligned}$$

(c) Es reicht zu zeigen, dass $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$ gilt. Wir haben

$$\begin{aligned}
x \in \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall\, n \ \geq m : x \in A_n.
\end{aligned}$$

Wähle ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq m_0$ gilt: $x \in A_n$.
Nach der Definition von $\limsup_{n\to\infty} A_n$ folgt

$$\begin{aligned}
&x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \\
\Longleftrightarrow \quad &\forall m \in \mathbb{N} : \exists\, n \geq m : x \in A_n
\end{aligned}$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ wähle $n = \max\{m_0, m\}$ (von oben). Damit ist $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(d) Zeige nach Hinweis

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c). \tag{$*$}$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{\text{(a)}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) \overset{\text{(b)}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c) \overset{\text{(a)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Es bleibt $(*)$ zu zeigen.
Definiere $B_n := A_n^c \backslash A_{n-1}^c$. Mit $A_{n+1} \subseteq A_n$ gilt $A_n^c \subseteq A_{n+1}^c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Per Konstruktion sind die B_n disjunkt und es gilt

$$\dot{\bigcup}_{n=1}^{N} B_n = A_N^c \quad \text{sowie} \quad \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \quad &= \quad \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B_n) \overset{\text{(iii)}}{=} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N^c).
\end{aligned}$$

Alle Limiten existieren, da es sich hierbei um monoton wachsende, nach oben beschränkte Folgen handelt.

Aufgabe P2 (Darstellen von Ereignissen).

Eine Urne enthält rote und grüne Kugeln. Es werden $n \in \mathbb{N}$ Kugeln gezogen, wobei das Ereignis A_i, $i = 1, ..., n$, eintritt, wenn die i-te Kugel rot ist. Drücken Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe von A_i aus und verwenden Sie dabei *nur* Vereinigungen, Durchschnitte und Komplemente von A_i:

B_1	$=$	„alle Kugeln sind rot“	B_2	$=$	„mindestens eine Kugel ist rot“
B_3	$=$	„genau eine Kugel ist rot“	B_4	$=$	„alle n Kugeln haben die gleiche Farbe“

Lösung:

(i) $B_1 = \bigcap_{i=1}^n A_i$

(ii) $B_2 = \bigcup_{i=1}^n A_i$

(iii) $B_3 = \bigcup_{i=1}^n \left(\left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^n A_j^c \right) \cap A_i \right)$

(iv) $B_4 = (\bigcap_{i=1}^n A_i) \cup (\bigcap_{i=1}^n A_i^c)$

Aufgabe P3 (Aufstellen wahrscheinlichkeitstheoretischer Modelle).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\mathbb{P}$ als Laplace-Verteilung festgelegt wird. Geben Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils einen Stichprobenraum Ω an. Dieser soll so gewählt sein, dass alle in der Aufgabenstellung relevanten Ereignisse in $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ enthalten sind und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die Situation aus der Aufgabenstellung vollständig modelliert.
Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Ereignisse.

(a) Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten. Es gibt 4 verschiedene Farben (Karo, Herz, Pik, Kreuz), die jeweils mit 8 Karten im Spiel vertreten sind. Der Stapel wird gut durchgemischt und ein Spieler zieht 10 Karten.

   (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die/der Spielende *genau* 6 Herzkarten gezogen?

   (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die/der Spielende *mindestens* 7 Herzkarten gezogen?

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass beim Lotto (*6 aus 49*) während eines Kalenderjahres (52 Ausspielungen) jede der 49 Zahlen mindestens einmal Gewinnzahl wird.

(c) Es sollen 20 Studierende schriftlich von einer Änderung des Prüfungstermins benachrichtigt werden. Im irrtümlichen Glauben, dass jeder der 20 Briefe den gleichen Inhalt aufweist, verteilt das Sekretariat die Briefe willkürlich in die verschiedenen Umschläge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gelangt?

Hinweis: Nutzen Sie für (b), (c) den Satz aus Aufgabe 2:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Lösung:

(a) Seien $K_1, ..., K_{32}$ die Skatkarten. Wir nehme an, dass $K_1, ..., K_8$ die Herzkarten sind. Da der Stapel gut durchgemischt wird, ist jede Kombination von 10 Karten, die die/der Spielende zieht, gleichwahrscheinlich. Daher wird durch

$$\Omega = \{N \subseteq \{K_1, ..., K_{32}\} : |N| = 10\}$$

über die Laplace-Verteilung das Experiment vollständig modelliert. Es ist $|\Omega| = \binom{32}{10}$ (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge).

(i) Hier ist

$$\begin{aligned} A &= \text{„Die/der Spielende zieht genau 6 Herzkarten."} \\ &= \{N \in \Omega : |N \cap \{K_1, ..., K_8\}| = 6\} \\ &= \{N \in \Omega : |N \cap \{K_1, ..., K_8\}| = 6, |N \cap \{K_9, ..., K_{32}\}| = 4\}. \end{aligned}$$

Es müssen also 6 aus 8 Karten und 4 aus 24 gezogen werden. Ziehungen erfolgen unabhängig, d.h. wir multiplizieren die Möglichkeiten der beiden Teilziehungen. Daher gilt $|A| = \binom{24}{4} \cdot \binom{8}{6}$. Wir erhalten insgesamt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{8}{6}}{\binom{32}{10}}.$$

(ii) Wir haben das gleiche Prinzip wie bei (i). Es ist

$$\begin{aligned} A &= \text{„Die/der Spielende zieht mindestens 7 Herzkarten."} \\ &= \{N \in \Omega : |N \cap \{K_1, ..., K_8\}| \geq 7\} \\ &= \{N \in \Omega : |N \cap \{K_1, ..., K_8\}| = 7, |N \cap \{K_9, ..., K_{32}\}| = 3\} \\ &\quad \dot\cup \{N \in \Omega : |N \cap \{K_1, ..., K_8\}| = 8, |N \cap \{K_9, ..., K_{32}\}| = 2\}. \end{aligned}$$

Nutze nun Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und die Tatsache, dass die obigen beiden Teilereignisse disjunkt sind. Wir können $|A|$ analog zu (i) berechnen und erhalten

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{24}{3} \cdot \binom{8}{7} + \binom{24}{2} \cdot \binom{8}{8}}{\binom{32}{10}}.$$

(b) Wir setzen

$$\Omega = \{M \subset \{1, ..., 49\} : |M| = 6\}^{52}.$$

Ein Element enthält also 52 Mengen von jeweils 6 Elementen, die den einzelnen Ziehungen entsprechen. Weiterhin ist jede Ziehung gleichwahrscheinlich.
Definiere die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &:= \text{„jede Zahl 1,...,49 wird mindestens einmal Gewinnzahl bei 52 Ziehungen"} \\ A^c &:= \text{„mind. eine Zahl 1,...,49 wird nie Gewinnzahl bei 52 Ziehungen"} \\ A_i &:= \text{„die Zahl } i \text{ wird nie Gewinnzahl bei 52 Ziehungen"}. \end{aligned}$$

Dann gilt $A^c = \bigcup_{i=1}^{49} A_i$. Nach Hinweis erhalten wir

$$\mathbb{P}(A^c) = \sum_{j=1}^{49} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\}\subseteq\{1,...,49\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Es gilt

$$A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} = \text{„die Zahlen } k_1, ..., k_j \text{ werden nie Gewinnzahl bei 52 Ziehungen“}.$$

Nun ist für eine feste Ziehung von 6 Zahlen $p_j := \dfrac{\binom{49-j}{6}}{\binom{49}{6}}$ die Wahrscheinlichkeit, dass j bestimmte Zahlen keine Gewinnzahl sind (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge). Damit

$$\mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) = p_j^{52}.$$

Bemerkung: Für $j \geq 44$ ist $p_j = 0$ (wenn mehr als 43 Zahlen keine Gewinnzahlen sein können, können nicht 6 Zahlen Gewinnzahlen sein).
Folglich gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \sum_{j=1}^{43} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\}\subseteq\{1,...,49\}} p_j^{52} \right) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{43} \left((-1)^{j-1} \binom{49}{j} p_j^{52} \right). \end{aligned}$$

(c) Seien die Studierenden gegeben über die Nummerierung 1,...,20. Damit haben wir

$$\Omega = \{f : \{1, ..., 20\} \to \{1, ..., 20\} : f \text{ ist bijektiv}\} = S_{20},$$

wobei die entsprechende Permutationsgruppe bezeichnet.
(Ein Element $f \in \Omega$ entspricht dann der Verteilung der Briefe auf die Studierenden: $f(1)$ ist die Nummer des Studierenden, der den Brief von Studierenden 1 bekommt, usw.)
Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned} A &= \text{„mindestens ein Studierender erhält ihren / seinen eigenen Brief“} \\ &= \{f \in \Omega : \exists i \in \{1, ..., 20\} : f(i) = i\}. \end{aligned}$$

Es gilt $A = \bigcup_{i=1}^{20} A_i$ mit

$$A = \text{„Studierende } i \text{ erhält ihren / seinen eigenen Brief“} = \{f \in \Omega : f(i) = i\}.$$

Mit dem Hinweis folgt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{20} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\}\subseteq\{1,...,20\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Weiter gilt

$$A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} = \text{„Studierende } k_1, ..., k_j \text{ erhalten ihren eigenen Brief“}.$$

Wenn j Studierende ihren eigenen Brief haben, sind noch $(20-j)$ Briefe frei verteilbar (unter Beachtung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen), weswegen

$$\mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) = p_j := \frac{(20-j)!}{20!}.$$

Insgesamt folgt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{20} (-1)^{j-1} \binom{20}{j} \cdot p_j = \sum_{j=1}^{20} \frac{(-1)^{j-1}}{j!}.$$

Aufgabe P4 (Kombinatorik).

Nutzen Sie zum Lösen der Aufgaben die kombinatorischen Formeln aus der Vorlesung.

(a) Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck, $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Linien entstehen, wenn man alle Punkte miteinander verbindet?

(b) Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste $H_1, ..., H_7$ in 10 freien, durchnummerierten Einzelzimmern unterbringen?

(c) Es gebe 5 Äpfel und 3 Kinder. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Äpfel auf die Kinder zu verteilen?

(d) Wir haben $n \in \mathbb{N}$ Bücher. Unter den Büchern gibt es $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, gleiche Bücher, die wir nicht voneinander unterscheiden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die n Bücher in einem Regal nebeneinander anzuordnen?

Lösung:

(a) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ Punkte. Eine Linie ist eine Verbindung zwischen zwei Punkten. Damit entspricht die Anzahl der Linien gerade die Anzahl an Möglichkeiten, aus n Punkten zwei auszuwählen. Damit erhalten wir $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten.

(b) Die 7 Hotelgäste wählen aus 10 Zimmern. Die Hotelgäste sind individualisiert (unter Betrachtung der Reihenfolge). Ist das Zimmer einmal vergeben, kann es nicht mehr belegt werden (ohne Zurücklegen). Damit gibt es $\frac{10!}{(10-7)!}$ Möglichkeiten.

(c) Jeder Apfel kann beliebig einem Kind gegeben werden (ohne Reihenfolge). Ein Kind kann mehr als einen Apfel bekommen (mit Zurücklegen). Daher gibt es $\binom{3+5-1}{5} = 21$ Möglichkeiten, die Äpfel auf die Kinder zu verteilen.

(d) Wären alle Bücher verschieden, könnten sie auf $n!$ Arten angeordnet werden. Die m gleichen Bücher sind aber nicht unterscheidbar, Permutationen von diesen Büchern wurden aber bei $n!$ mitgezählt. Daher müssen diese nun wieder entfernt werden. Damit gibt es genau $\frac{n!}{m!}$ Anordnungen.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`