UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

Präsenzübungen 1

Aufgabe P1 (Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ und $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$ mit $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(b) **De Morgansche Regeln**: $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$, und $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$

(c) Mit der Definition $\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ gilt: $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
Hinweis: Hier darf verwendet werden, dass aus $A \subseteq B$ folgt: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(d) **Stetigkeit des Maßes von oben**:
Gilt $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
Hinweis: Gehen Sie unter Nutzung von (a),(b) zunächst zum Gegenereignis über. Definieren Sie dann $B_n := A_n^c \setminus A_{n-1}^c$, und drücken Sie $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ mittels der B_n aus. Nutzen Sie dann Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Aufgabe P2 (Darstellen von Ereignissen).

Eine Urne enthält rote und grüne Kugeln. Es werden $n \in \mathbb{N}$ Kugeln gezogen, wobei das Ereignis A_i, $i = 1, ..., n$, eintritt, wenn die i-te Kugel rot ist. Drücken Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe von A_i aus und verwenden Sie dabei *nur* Vereinigungen, Durchschnitte und Komplemente von A_i:

B_1	=	„alle Kugeln sind rot“	B_2	=	„mindestens eine Kugel ist rot“
B_3	=	„genau eine Kugel ist rot“	B_4	=	„alle n Kugeln haben die gleiche Farbe“

Aufgabe P3 (Aufstellen wahrscheinlichkeitstheoretischer Modelle).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\mathbb{P}$ als Laplace-Verteilung festgelegt wird. Geben Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils einen Stichprobenraum Ω an. Dieser soll so gewählt sein, dass alle in der Aufgabenstellung relevanten Ereignisse in $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ enthalten sind und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die Situation aus der Aufgabenstellung vollständig modelliert.
Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Ereignisse.

(a) Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten. Es gibt 4 verschiedene Farben (Karo, Herz, Pik, Kreuz), die jeweils mit 8 Karten im Spiel vertreten sind. Der Stapel wird gut durchgemischt und ein Spieler zieht 10 Karten.

  (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die/der Spielende *genau* 6 Herzkarten gezogen?

  (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die/der Spielende *mindestens* 7 Herzkarten gezogen?

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass beim Lotto (*6 aus 49*) während eines Kalenderjahres (52 Ausspielungen) jede der 49 Zahlen mindestens einmal Gewinnzahl wird.

(c) Es sollen 20 Studierende schriftlich von einer Änderung des Prüfungstermins benachrichtigt werden. Im irrtümlichen Glauben, dass jeder der 20 Briefe den gleichen Inhalt aufweist, verteilt das Sekretariat die Briefe willkürlich in die verschiedenen Umschläge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gelangt?

Hinweis: Nutzen Sie für (b), (c) den Satz aus Aufgabe 2:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $n \in \mathbb{N}$ *und seien* $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$*. Dann gilt*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Aufgabe P4 (Kombinatorik).

Nutzen Sie zum Lösen der Aufgaben die kombinatorischen Formeln aus der Vorlesung.

(a) Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck, $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Linien entstehen, wenn man alle Punkte miteinander verbindet?

(b) Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste $H_1, ..., H_7$ in 10 freien, durchnummerierten Einzelzimmern unterbringen?

(c) Es gebe 5 Äpfel und 3 Kinder. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Äpfel auf die Kinder zu verteilen?

(d) Wir haben $n \in \mathbb{N}$ Bücher. Unter den Büchern gibt es $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, gleiche Bücher, die wir nicht voneinander unterscheiden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die n Bücher in einem Regal nebeneinander anzuordnen?

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`