Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

12. Übungsblatt

Aufgabe 45	Aufgabe 46	Aufgabe 47	Aufgabe 48	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 45 (Schwache Konvergenz, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie, dass das schwache Gesetz der großen Zahlen aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt.

(b) X_n besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_n(x) = \frac{n+1}{2}|x|^n \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Gibt es eine Zufallsvariable Z mit $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$? Geben Sie Z bei Existenz an.

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob eine Zufallsvariable Z existiert mit $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ für

(i) $X_n \sim U[0, 1 + \frac{1}{n}]$,

(ii) $X_n \sim \mathrm{Exp}(n)$,

(iii) $X_n \sim \mathrm{Exp}(1/n)$.

Aufgabe 46 (Schwache Konvergenz, Delta-Methode, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und X eine weitere Zufallsvariable. Weiter sei $c \in R$ eine deterministische Konstante.

(a) Sei $X \sim \mathrm{Bin}(1, \frac{1}{2})$ Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, und $X_n := 1 - X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ aber nicht $X_n \xrightarrow{p} X$.

(b) Nun gelte $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$. Zeigen Sie, dass dann sogar $X_n \xrightarrow{p} c$ folgt.
Hinweis: Drücken Sie $\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon)$ mit der Verteilungsfunktion F_{X_n} von X_n aus.

(c) *Die Delta-Methode:* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen mit $a_n \to \infty$. Sei Z eine Zufallsvariable, sodass $a_n(X_n - c) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in einer Umgebung von c stetig differenzierbare Funktion mit $g'(c) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann folgt:

$$a_n(g(X_n) - g(c)) \xrightarrow{\mathcal{D}} g'(c) \cdot Z.$$

Hinweis: Nutzen Sie eine Taylor-Entwicklung von g um c: Für $x \in \mathbb{R}$ und ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $|\tilde{x} - c| \leq |x - c|$ gilt $g(x) = g(c) + (x - c)g'(c) + (x - c) \cdot (g'(\tilde{x}) - g'(c))$. Nutzen Sie Proposition 14.9 der Vorlesung.

Aufgabe 47 (Asymptotische Verteilung von Schätzern, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter λ. Zur Bestimmung von λ schlagen wir die folgenden beiden Schätzer vor:

$$\hat{\lambda}_1 := -\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > 1\}}\right), \qquad \hat{\lambda}_2 := \frac{1}{\overline{X_n}},$$

wobei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ den Mittelwert bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_i - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ mit $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$, gilt.
Hinweis: Nutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz und Aufgabe 46(c).

(b) Argumetieren Sie, warum $\hat{\lambda}_2$ zum Schätzen von λ besser geeignet ist.
Hinweis: Es gilt $e^x - 1 > x^2$ für alle $x > 0$.

(c) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\lambda \in S(X_1, ..., X_n)) \to 1 - \alpha$ für $n \to \infty$ gilt, wobei

$$S(X_1, ..., X_n) := \left[\hat{\lambda}_2\left(1 - \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right), \hat{\lambda}_2\left(1 + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

mit $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ als $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standardnormalverteilung.

Aufgabe 48 (Pearsons χ^2-Test, 4 Punkte).

Wir vermuten, dass bei einem 400-Meter-Rennen die Startposition einen Einfluss auf die Gewinnchancen ausübt. Die folgende Tabelle gliedert 144 Siegerinnen und Sieger nach der Nummer ihrer Startposition auf (wobei die Startpositionen von innen nach außen nummeriert sind):

Position	1	2	3	4	5	6	7	8
Häufigkeit	29	19	18	25	17	10	15	11

Testen Sie die Hypothese „gleiche Gewinnchancen“ gegen die Alternative „ungleiche Gewinnchancen“ zum Niveau $\alpha = 0.01$ mit Pearsons χ^2-Test!
Quantile: $\chi^2_{7,0.99} = 18.48$, $\chi^2_{8,0.99} = 20.09$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **23. Januar 2020, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`