UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

11. Übungsblatt

Aufgabe 41	Aufgabe 42	Aufgabe 43	Aufgabe 44	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 41 (Einstichproben t-Test, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

In einem Einkaufsladen sehen wir Packungen, die $\mu_0 = 500$ Gramm Mehl beinhalten sollen. Wir sind skeptisch und wollen dem Hersteller nachweisen, dass er weniger als 500 Gramm Mehl in die Tüten abfüllt.
Dazu nehmen wir an, dass das Mehltütengewicht normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ (entspricht durchschnittlichem Mehltütengewicht) und unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Wir kaufen $n = 12$ Mehltüten und messen folgende Gewichte (in Gramm):

494.0	495.0	498.0	493.4	494.1	501.0	498.9	506.1	498.4	491.2	501.3	484.6

(a) Formulieren Sie zunächst die Hypothesen für das Testproblem, so dass der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entspricht, dass wir den Hersteller zu Unrecht beschuldigen. Führen Sie dann einen Student t-Test (Satz 13.8) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und formulieren Sie das Ergebnis der Testentscheidung.

(b) Sei $\alpha \in (0,1)$. Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Weiter sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ die empirische Stichprobenvarianz. Zeigen Sie, dass $S(X_1, ..., X_n) := \Big(-\infty, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}\Big]$ ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ ist.
Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus Satz 13.4(ii).

(c) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für das durchschnittliche Mehltütengewicht μ basierend auf unseren Beobachtungen an.

Quantile der t-Verteilung: $t_{11,0.95} = 1.796$, $t_{12,0.95} = 1.782$.

Aufgabe 42 (Zweistichproben t-Test, 4 Punkte).

Ein/e Wissenschaftler/in möchte untersuchen, ob die Kenntnisse der Vektorrechnung von Schüler/innen der 12. Klasse eines Gymnasiums besser sind als die von Mathematikstudenten im 3. Semester. Dazu hat er eine Vergleichsarbeit entwickelt, die er nun in einer 12. Klasse mit 10 Schüler/innen sowie in einem Seminar mit 6 Mathematik-Studierenden lösen lässt. Der/die Wissenschaftler/in nimmt an, dass die dabei erreichte Punktzahl (in Prozent) normalverteilt ist mit Mittelwert μ_S (Schüler) bzw. μ_U (Studenten) und gleicher, unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Er erhält folgende Ergebnisse für die Punktzahl (in Prozent):

Schüler/in	81.4	67.8	70.0	66.8	61.9	83.8	61.9	70.9	69.1	78.5
Studierende	54.2	67.6	58.7	62.5	61.4	65.3				

Führen Sie einen Zweistichproben t-Test (Satz 13.11) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und entscheiden Sie, ob der/die Wissenschaftler/in mit seiner/ihrer Annahme (Schüler/innen besser als Studierende) Recht hat oder nicht. Hierbei sollte der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entsprechen, dass die Schüler/innen als besser eingeschätzt werden, obwohl es nicht stimmt.
Quantile der t-Verteilung: $t_{14,0.95} = 1.761$, $t_{15,0.95} = 1.753$, $t_{16,0.95} = 1.746$.

Aufgabe 43 (Test für autoregrssive Prozesse, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\theta \in (-1, 1)$. Seien $X_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit $X_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\theta^2}\right)$ und $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $i = 1, ..., n$. $X_1, ..., X_n$ seien rekursiv definiert durch $X_t := \theta \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, ..., n$. Wir gehen davon aus, dass wir nur $X_0, ..., X_n$ beobachten. Sei nun $\theta_0 \in (-1, 1)$. Wir wollen auf die Hypothesen $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$ testen. Dafür schlagen wir folgenden Test vor:

$$\phi(X_0, ..., X_n) := \begin{cases} 1, & W_n > k_n, \\ 0, & W_n \leq k_n \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad W_n := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \theta_0 X_{t-1})^2.$$

(a) Berechnen Sie $k_n > 0$, so dass ϕ ein Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist.

(b) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Berechnen Sie ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $S(X_0, ..., X_n)$ für den unbekannten Parameter $\theta \in (-1, 1)$, zum Beispiel mit Satz 9.3.

(c) Wir beobachten nun $n = 100$ Werte $X_0, ..., X_n$ und erhalten

$$\hat{c}_n(0) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2 = 2.900, \quad \tilde{c}_n(0) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 2.906, \quad \hat{c}_n(1) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-1} = 2.436.$$

Wir vermuten einen wahren Wert von $\theta_0 = 0.3$. Wie sieht die Testentscheidung von ϕ zum Niveau $\alpha = 0.05$ aus? Geben Sie außerdem ein 95%-Konfidenzintervall für θ an.
Quantile der χ^2-Verteilung: $\chi^2_{100,0.95} = 124.3$, $\chi^2_{100,0.05} = 77.9$.

Aufgabe 44 (Anwendung ZGWS, SGGZ), 4 = 1.5 + 1 + 1.5 Punkte).

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Laplace}(\mu, b)$ Laplace-verteilt mit Dichten $f_{\mu,b}(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ Parameter sind. Seien $\overline{X_n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \overline{X_n}|$.

(a) Zeigen Sie, dass mit geeignetem $\sigma > 0$ gilt:
$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2)$ und $\tilde{S}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu| \xrightarrow{p} b$.

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2} S_n} \left(\overline{X_n} - \mu\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $S_n - \tilde{S}_n \xrightarrow{p} 0$. Sie dürfen Proposition 14.9 verwenden

(c) Konstruieren Sie mittels (a) einen (möglichst sinnvollen) Test $\phi(X_1, ..., X_n)$ für die Hypothesen $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ bei unbekanntem b, der ein vorgegebenes Niveau $\alpha \in (0, 1)$ zumindest asymptotisch einhält, d.h. es soll gelten $\mathbb{P}_{\mu_0}(\phi = 1) \to \alpha$ $(n \to \infty)$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **16. Januar 2020, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`