



10. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 37	Aufgabe 38	Aufgabe 39	Aufgabe 40	Summe:

Übungsgruppe:

Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 37 (Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung, 8 = 2 + 2 + 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir definieren den Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)\right),$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_d)' \in \mathbb{R}^d$, stellt tatsächlich eine Dichte auf \mathbb{R}^d dar.

(b) X_1, \dots, X_d sind genau dann unabhängig und normalverteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ für $i = 1, \dots, d$, wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2)$.

(c) Für alle $i, j = 1, \dots, d$ gilt $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ und $\text{Kov}(X_i, X_j) = \Sigma_{ij}$.

Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis die unten stehende Regel (). Zeigen Sie die Aussage zuerst für $\Sigma = I_{d \times d}$. Betrachten Sie dann $\text{Kov}(Y_i, Y_j)$ mit $Y := \Sigma^{-1/2}(X - \mu)$ für $i, j = 1, \dots, d$ und nutzen Sie die Bilinearität der Kovarianz, um auf $\text{Kov}(X_i, X_j)$ für $i, j = 1, \dots, d$ zu schließen.*

(d) Beweisen Sie die unten stehende Regel (*) im zwei-dimensionalen Fall.

Regel (): „Sei $X = (X_1, \dots, X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch positiv definit. Sei ferner $p \leq d$, $A \in \mathbb{R}^{p \times d}$ mit $\text{Rang}(A) = p$, und $b \in \mathbb{R}^p$. Dann gilt $AX + b \sim \mathcal{N}(A\mu + b, A\Sigma A')$.“*

Lösung:

(a) Sei $x = (x_1, \dots, x_d)' \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) dx_1 \dots dx_d \\
\stackrel{y=x-\mu}{=} & \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{2}y' \Sigma^{-1}y\right) dy_1 \dots dy_d \\
\stackrel{z:=\Sigma^{-1/2}y}{=} & \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \det(\Sigma)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}z'z\right) dz_1 \dots dz_d \\
= & \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \det(\Sigma)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n z_i^2\right) dz_1 \dots dz_d = \det(\Sigma)^{1/2} \prod_{i=1}^n \sqrt{2\pi} = (2\pi)^{d/2} \det(\Sigma)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.

(b) Sind X_1, \dots, X_d unabhängig mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, so folgt für die gemeinsame Dichte von $X = (X_1, \dots, X_d)$ mit $x = (x_1, \dots, x_d)$,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \prod_{i=1}^d f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \left(\prod_{i=1}^d \sigma_i^2\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right)
\end{aligned}$$

Nun ist mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2)$ offensichtlich $\det(\Sigma) = \prod_{i=1}^d \sigma_i^2$ und

$$(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu) = (x - \mu)' \text{diag}(\sigma_1^{-2}, \dots, \sigma_d^{-2})(x - \mu) = \sum_{i=1}^d \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2},$$

insgesamt also

$$f_X(X) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)\right),$$

die Dichte einer $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ -Verteilung.

Ist nun umgekehrt $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2)$, so folgt mittels (c) für $i = 1, \dots, d$,

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2),$$

d.h.

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right).$$

Mit denselben Umformungen wie oben erhalten wir nun

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) = \prod_{i=1}^d f_{X_i}(x_i).$$

Damit sind X_1, \dots, X_d stochastisch unabhängig.

(c) Wir wenden die Regel (*) mit $A = e'_i$, dem transponierten i -ten Einheitsvektor $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$, in \mathbb{R}^d an. Es folgt

$$X_i = AX \sim N(A\mu, A\Sigma A').$$

Hier ist $A\mu = e'_i\mu = \mu_i$, und $A\Sigma A' = e'_i A e_i = \Sigma_{ii}$. Damit folgt also

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_{ii}).$$

Aus den bereits bekannten Eigenschaften einer Normalverteilung schließen wir sofort $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$.

Weiterhin sei zunächst $\Sigma = I_{d \times d}$. Laut (b) sind X_1, \dots, X_d dann stochastisch unabhängig mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1)$, $i = 1, \dots, d$, und es folgt

$$\text{Kov}(X_i, X_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

also insbesondere $\text{Kov}(X_i, X_j) = \Sigma_{ij}$.

Sei nun Σ beliebig. Definiere $Y := \Sigma^{-1/2}(X - \mu)$. Dann gilt nach der Regel (*)

$$Y = \Sigma^{-1/2}X - \Sigma^{-1/2}\mu \sim \mathcal{N}(\Sigma^{-1/2}\mu - \Sigma^{-1/2}\mu, \Sigma^{-1/2}\Sigma\Sigma^{-1/2}) = \mathcal{N}(0, I_{d \times d}).$$

Es folgt für $i, j = 1, \dots, d$ gerade

$$\text{Kov}(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}.$$

Wegen $X = \Sigma^{1/2}Y + \mu$ erhalten wir für $i, j = 1, \dots, d$,

$$\begin{aligned} \text{Kov}(X_i, X_j) &= \text{Kov}((\Sigma^{1/2}Y)_i + \mu_i, (\Sigma^{1/2}Y)_j + \mu_j) = \text{Kov}((\Sigma^{1/2}Y)_i, (\Sigma^{1/2}Y)_j) \\ &= \text{Kov}\left(\sum_{k=1}^d (\Sigma^{1/2})_{ik} Y_k, \sum_{l=1}^d (\Sigma^{1/2})_{jl} Y_l\right) = \sum_{k,l=1}^d (\Sigma^{1/2})_{ik} (\Sigma^{1/2})_{jl} \underbrace{\text{Kov}(Y_k, Y_l)}_{=\delta_{kl}} \\ &= \sum_{k=1}^d (\Sigma^{1/2})_{ik} (\Sigma^{1/2})_{jk} \stackrel{\Sigma \text{ symm.}}{=} (\Sigma^{1/2} \cdot \Sigma^{1/2})_{ij} = \Sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Beachte $\text{Kov}(c, X) = 0$ für Konstanten c .

- (d) Wir setzen $B := \Sigma^{1/2} = PD^{1/2}P'$ und $B = B'$ (möglich durch Diagonalisierbarkeit).

Wir definieren $U := B^{-1}(X - \mu)$ und es gilt $U \sim \mathcal{N}(0, I)$, $I := I_{2 \times 2}$. Eine einfache Rechnung über die Dichten von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ und $U \sim \mathcal{N}(0, I)$ zeigt, dass $BU \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, wobei

$$f_{BU}(x) = \frac{1}{\det(B)} f_U(B^{-1}x)$$

für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Das genaue Argument lautet hierbei: Für eine Menge $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq m_1, x_2 \leq m_2\}$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^d$, und $MB^{-1} := \{y \in \mathbb{R}^2 : By \in M\}$ gilt

$$\mathbb{P}(BU \in M) = \mathbb{P}(U \in MB^{-1}) = \int \int_{MB^{-1}} f_U(u) du_1 du_2 = \frac{1}{\det(B)} \int \int_M f_U(B^{-1}x) dx_1 dx_2.$$

Wir zeigen die Aussage für den Fall $\mu = 0$. Der Fall $\mu \neq 0$ folgt mit analoger Rechnung.

Sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_{AX}(x) = f_{ABU}(x) &= \frac{1}{\det(A) \det(B)} f_U(B^{-1}A^{-1}x) \\ &= \frac{1}{2\pi \det(A) \det(B)} \exp\left(-\frac{(B^{-1}A^{-1}x)'(B^{-1}A^{-1}x)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi \det(A) \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x'(A\Sigma A')^{-1}x}{2}\right). \end{aligned}$$

Ist $A \in M(1 \times 2, \mathbb{R})$, d.h. $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, also $AX = a_1X_1 + a_2X_2$,

$$\text{Var}(AX) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + a_2^2 \text{Var}(X_2) + 2a_1a_2 \text{Kov}(X_1, X_2) = a_1^2 \Sigma_{11} + a_2^2 \Sigma_{22} + 2a_1a_2 \Sigma_{12} = A \Sigma A'.$$

Aufgabe 38 (Hauptkomponentenanalyse und beste lineare Vorhersage, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und wir betrachten den Zufallsvektor $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, wobei

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Hauptkomponenten von X .
- (b) Bestimmen Sie die beste lineare Approximation von X und den zugehörigen Prädiktionsefehler, d.h. lösen Sie das Minimierungsproblem aus Satz 12.5.

Lösung:

- (a) Wir verwenden das Konzept der Diagonalisierung. Wir erhalten das charakteristische Polynom von Σ gerade $\chi_\Sigma = t^2 - 10t + 16$. Damit sind die Eigenwerte gegeben durch $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 2$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)'$ und $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)'$. Damit ergeben sich die Hauptkomponenten

$$Y_1 = Q_1'(X - \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(X_1 - 1) - (X_2 - 2)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2 + 1)$$

$$Y_2 = Q_2'(X - \mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(X_1 - 1) + (X_2 - 2)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2 - 3).$$

- (b) Sei $\Lambda = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Für $Y := \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2$ wollen wir das Problem

$$E = \sum_{j=1}^2 \mathbb{E}[X_j - (\alpha_j + \beta_j Y)]^2$$

über $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, minimieren. Für $j = 1, 2$ haben wir

- (i) $\alpha_j^* = \alpha_j - \mathbb{E}[X_j] + \beta_j \mathbb{E}[Y] = 0$,
- (ii) $\beta_j = \text{Kov}(Y, X_j) / \text{Var}(Y)$ und
- (iii) $\sum_{j=1}^2 \text{Var}(X_j) - \text{Kov}(Y, X_j)^2 / \text{Var}(Y)$, was über γ_j minimiert wird.

Aus (iii) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1/2} Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

- (i) $Y = \frac{X_1 - X_2}{4}$, $\mathbb{E}[Y] = -\frac{1}{4}$, $\text{Var}(Y) = 1$,
- (ii) $\beta_1 = \text{Kov}(Y, X_1) / \text{Var}(Y) = 2$, $\beta_2 = -2$,
- (iii) $\alpha_1 = \mathbb{E}[X_1] - \beta_1 \mathbb{E}[Y] = \frac{3}{2}$ und $\alpha_2 = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$.

Damit ergibt sich für den minimalen Prädiktionsfehler $E = 10 - 8 = 2$.

Aufgabe 39 (Schätzer für die Kovarianzmatrix, 4 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_{1i}X_{1j}] < \infty$ für $i, j = 1, \dots, n$, wobei $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n})$. Zeigen Sie, dass der folgende Schätzer für die Kovarianzmatrix Σ ,

$$\hat{\Sigma}_{ij} := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{ki} - X_{\cdot i})(X_{kj} - X_{\cdot j}), \quad X_{\cdot i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{ki}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für Σ ist, d.h. dass $\mathbb{E}\hat{\Sigma}_{ij} = \Sigma_{ij}$ gilt.

Lösung:

Wir betrachten den Fall $\mu = 0$; sonst $X - \mu$ für $\mu \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{ij} &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_{ki}X_{kj} - \frac{n}{n-1} X_{\cdot i} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{kj} - \frac{n}{n-1} X_{\cdot j} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{ki} + \frac{n}{n-1} X_{\cdot i} X_{\cdot j} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_{ki}X_{kj} - \frac{n}{n-1} X_{\cdot i} X_{\cdot j}. \end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\Sigma}_{ij}] &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{ki}X_{kj}] - \frac{n}{n-1} \mathbb{E}[X_{\cdot i}X_{\cdot j}] \\ &= \frac{1}{n-1} (n\Sigma_{ij} - n\frac{1}{n^2}n\Sigma_{ij}) = \Sigma_{ij}, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbb{E}[X_{\cdot i}X_{\cdot j}] = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{l=1}^n \mathbb{E}[X_{li}X_{lj}] + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^n \mathbb{E}[X_{li}X_{kj}] \right] = \frac{n}{n^2} \Sigma_{i,j}.$$

Aufgabe 40 (Moving Average Prozesse, 8 = 2 + 2 + 2 + 2 Bonuspunkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\sigma > 0$ sowie $\theta \in (-1, 1)$. Wir definieren $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $i = 0, \dots, n$. Weiter seien X_1, \dots, X_n gegeben durch

$$X_t := \varepsilon_t + \theta \cdot \varepsilon_{t-1} \quad (t = 1, \dots, n).$$

- (a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_t]$, $\text{Kov}(X_t, X_{t-k})$ und $\rho(X_t, X_{t-k})$ für $t = 1, \dots, n$ und $k = 0, \dots, t-1$.
- (b) Zeigen Sie, dass $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ multivariat normalverteilt ist mit $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$\Sigma_{ij} = \sigma^2 \left((1 + \theta^2) \cdot \mathbf{1}_{\{|i-j|=0\}} + \theta \cdot \mathbf{1}_{\{|i-j|=1\}} \right) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Regel () aus Aufgabe 37.*

- (c) Zeigen Sie, dass $\hat{c}_n(0) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1^2]$.
Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung und zur Berechnung der auftretenden Terme folgende Aussage: „Für $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ gilt, dass $\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ik} \Sigma_{jl} + \Sigma_{il} \Sigma_{jk}$.“

- (d) Analog zu (c) kann gezeigt werden, dass $\hat{c}_n(1) := \frac{1}{n} \sum_{t=2}^n X_t X_{t-1} \xrightarrow{p} \mathbb{E}[X_2 X_1]$. Geben Sie auf Basis von $\hat{c}_n(0)$ und $\hat{c}_n(1)$ einen konsistenten Schätzer für $\sigma^2(1 - \theta)^2$ an.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 33 (a).

Lösung:

- (a) Es ist für $t = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \theta \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}] = 0,$$

und für $t = 1, \dots, n$, $k = 0, \dots, t - 1$,

$$\begin{aligned} \text{Kov}(X_t, X_{t-k}) &= \text{Kov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k} + \theta\varepsilon_{t-k-1}) \\ &= \text{Kov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) + \theta\text{Kov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k-1}) + \theta\text{Kov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k}) + \theta^2\text{Kov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k-1}) \\ &= \begin{cases} \sigma^2 + 0 + 0 + \theta^2\sigma^2, & k = 0, \\ 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0, & k = 1, \\ 0 + 0 + 0 + 0, & k \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma^2, & k = 0, \\ \theta\sigma^2, & k = 1, \\ 0, & k \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Für die Varianz erhalten wir damit (das ist $\text{Kov}(X_t, X_{t-k})$ für $k = 0$),

$$\text{Var}(X_t) = (1 + \theta^2)\sigma^2.$$

Damit folgt für die Korrelation

$$\rho(X_t, X_{t-k}) = \frac{\text{Kov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t-k})}} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{\theta}{1 + \theta^2}, & k = 1, \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

- (b) Es ist bekannt, dass $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ unabhängig und $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilt sind. Aus Aufgabe 37(b) folgt, dass

$$(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{\sigma^2 \cdot I_{(n+1) \times (n+1)}}_{=: \tilde{\Sigma}}).$$

Mit der Regel (*) folgt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{=: A} = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \theta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \sim N(0, \underbrace{A\tilde{\Sigma}A'}_{=: \Sigma}),$$

(offensichtlich hat A vollen Zeilenrang) d.h. auch (X_1, \dots, X_n) ist multivariat normalverteilt. Die Kovarianzmatrix Σ muss nicht mittels $A\tilde{\Sigma}A'$ berechnet werden, da wir die Kovarianzen bereits in (a) bestimmt haben und nach Blatt 10, Aufgabe 37(c) die Einträge von Σ genau den Kovarianzen entsprechen. Daher ist für $t = 1, \dots, n$ und $k = 0, \dots, t - 1$,

$$\Sigma_{t,t-k} = \sigma^2 \left((1 + \theta^2) \cdot \mathbf{1}_{\{k=0\}} + \theta \cdot \mathbf{1}_{\{k=1\}} \right),$$

und aufgrund der Symmetrie der Kovarianzmatrix folgt für $i, j = 1, \dots, n$,

$$\Sigma_{ij} = \sigma^2 \left((1 + \theta^2) \cdot \mathbf{1}_{\{|i-j|=0\}} + \theta \cdot \mathbf{1}_{\{|i-j|=1\}} \right).$$

(c) Es gilt

$$\mathbb{E}[\hat{c}_n(0)] = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[X_t^2] = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma^2(1 + \theta^2) = \sigma^2(1 + \theta^2) = \mathbb{E}[X_1^2],$$

und

$$\text{Var}(\hat{c}_n(0)) = \frac{1}{n^2} \sum_{s,t=1}^n \text{Kov}(X_t^2, X_s^2) \leq \frac{2}{n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{k=0}^{t-1} |\text{Kov}(X_t^2, X_{t-k}^2)|.$$

Hier ist

$$\begin{aligned} \text{Kov}(X_t^2, X_{t-k}^2) &= \mathbb{E}[X_t^2 X_{t-k}^2] - \mathbb{E}[X_t^2] \mathbb{E}[X_{t-k}^2] \\ &= \left(\Sigma_{t,t} \Sigma_{t-k,t-k} + 2 \Sigma_{t,t-k} \Sigma_{t,t-k} \right) - \left(\Sigma_{t,t} \Sigma_{t-k,t-k} \right) = 2 \Sigma_{t,t-k} \Sigma_{t,t-k} \\ &= 2\sigma^4 \left((1 + \theta^2)^2 \mathbb{1}_{\{k=0\}} + \theta^2 \mathbb{1}_{\{k=1\}} \right). \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\text{Var}(\hat{c}_n(0)) \leq \frac{4}{n^2} \sigma^2 \cdot \sum_{t=1}^n \left((1 + \theta^2)^2 + \theta^2 \right) = \frac{4}{n} \sigma^2 \left((1 + \theta^2)^2 + \theta^2 \right) \rightarrow 0.$$

Damit folgt $\hat{c}_n(0) - \mathbb{E}[\hat{c}_n(0)] \xrightarrow{(2)} 0$ bzw. $\hat{c}_n(0) \xrightarrow{(2)} \sigma^2(1 + \theta^2) = \mathbb{E}[X_1^2]$ und damit (Tschebyscheff) $\hat{c}_n(0) \xrightarrow{P} \sigma^2(1 + \theta^2) = \mathbb{E}[X_1^2]$.

(d) Nach Voraussetzung und (c) haben wir

$$\hat{c}_n(0) \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2(1 + \theta^2) =: c(0), \quad \hat{c}_n(1) \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_2 X_1] = \sigma^2 \theta =: c(1).$$

Offensichtlich ist

$$c(0) - 2c(1) = \sigma^2(1 - \theta)^2,$$

das heißt, dass $\hat{\theta}_n := \hat{c}_n(0) - 2\hat{c}_n(1)$ ein guter Kandidat für einen konsistenten Schätzer für $\sigma^2(1 - \theta)^2$ ist. Da die Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = y - 2x$ stetig in $(c(1), c(0)) = (\sigma^2 \theta, \sigma^2(1 + \theta^2))$ ist, folgt mit dem 9. Übungsblatt, Aufgabe 33(a),

$$\hat{\theta}_n = h(\hat{c}_n(1), \hat{c}_n(0)) \xrightarrow{P} h(c(1), c(0)) = c(0) - 2c(1) = \sigma^2(1 - \theta)^2.$$

Abgabe:

In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **09. Januar 2020, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabebblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:

<https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html>