UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

10. Übungsblatt

Aufgabe 37	Aufgabe 38	Aufgabe 39	Aufgabe 40	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 37 (Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung, 8 = 2 + 2 + 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir definieren den Zufallsvektor $X = (X_1, ..., X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\Big),$$

wobei $x = (x_1, ..., x_d)' \in \mathbb{R}^d$, stellt tatsächlich eine Dichte auf $\mathbb{R}^d$ dar.

(b) $X_1, ..., X_d$ sind genau dann unabhängig und normalverteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ für $i = 1, ..., d$, wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_d^2)$.

(c) Für alle $i, j = 1, ..., d$ gilt $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ und $\operatorname{Kov}(X_i, X_j) = \Sigma_{ij}$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis die unten stehende Regel $(*)$. Zeigen Sie die Aussage zuerst für $\Sigma = I_{d\times d}$. Betrachten Sie dann $\operatorname{Kov}(Y_i, Y_j)$ mit $Y := \Sigma^{-1/2}(X-\mu)$ für $i, j = 1, ..., d$ und nutzen Sie die Bilinearität der Kovarianz, um auf $\operatorname{Kov}(X_i, X_j)$ für $i, j = 1, ..., d$ zu schließen.

(d) Beweisen Sie die unten stehende Regel $(*)$ im zwei-dimensionalen Fall.

Regel $(*)$: „Sei $X = (X_1, ..., X_d) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch positiv definit. Sei ferner $p \le d$, $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$ mit Rang$(A) = p$, und $b \in \mathbb{R}^p$. Dann gilt $AX + b \sim \mathcal{N}(A\mu + b, A\Sigma A')$.“

Aufgabe 38 (Hauptkomponentenanalyse und beste lineare Vorhersage, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und wir betrachten den Zufallsvektor $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, wobei

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Hauptkomponenten von X.

(b) Bestimmen Sie die beste lineare Approximation von X und den zugehörigen Prädiktionsfehler, d.h. lösen Sie das Minimierungsproblem aus Satz 12.5.

Aufgabe 39 (Schätzer für die Kovarianzmatrix, 4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_{1i}X_{1j}] < \infty$ für $i, j = 1, ..., n$, wobei $X_1 = (X_{11}, ..., X_{1n})$. Zeigen Sie, dass der folgende Schätzer für die Kovarianzmatrix Σ,

$$\hat{\Sigma}_{ij} := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_{ki} - X_{\cdot i})(X_{kj} - X_{\cdot j}), \qquad X_{\cdot i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{ki}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für Σ ist, d.h. dass $\mathbb{E}\hat{\Sigma}_{ij} = \Sigma_{ij}$ gilt.

Aufgabe 40 (Moving Average Prozesse, 8 = 2 + 2 + 2 + 2 Bonuspunkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\sigma > 0$ sowie $\theta \in (-1, 1)$. Wir definieren $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen mit $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $i = 0, ..., n$. Weiter seien $X_1, ..., X_n$ gegeben durch

$$X_t := \varepsilon_t + \theta \cdot \varepsilon_{t-1} \qquad (t = 1, ..., n).$$

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_t]$, $\mathrm{Kov}(X_t, X_{t-k})$ und $\rho(X_t, X_{t-k})$ für $t = 1, ..., n$ und $k = 0, ..., t-1$.

(b) Zeigen Sie, dass $(X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ multivariat normalverteilt ist mit $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$\Sigma_{ij} = \sigma^2 \Big((1 + \theta^2) \cdot \mathbb{1}_{\{|i-j|=0\}} + \theta \cdot \mathbb{1}_{\{|i-j|=1\}} \Big) \qquad (i, j = 1, ..., n).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Regel $(*)$ *aus Aufgabe 37.*

(c) Zeigen Sie, dass $\hat{c}_n(0) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} X_t^2 \xrightarrow{p} \mathbb{E}[X_1^2]$.
Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung und zur Berechnung der auftretenden Terme folgende Aussage: „Für $(X_1, ..., X_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ *gilt, dass* $\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = \Sigma_{ij}\Sigma_{kl} + \Sigma_{ik}\Sigma_{jl} + \Sigma_{il}\Sigma_{jk}$*."*

(d) Analog zu (c) kann gezeigt werden, dass $\hat{c}_n(1) := \frac{1}{n} \sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-1} \xrightarrow{p} \mathbb{E}[X_2 X_1]$. Geben Sie auf Basis von $\hat{c}_n(0)$ und $\hat{c}_n(1)$ einen konsistenten Schätzer für $\sigma^2(1-\theta)^2$ an.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 33 (a).

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **09. Januar 2020, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Wir wünschen Ihnen schöne Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`