UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

9. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 33	Aufgabe 34	Aufgabe 35	Aufgabe 36	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 33 (Rechenregeln für stochastische Konvergenz, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Zufallsvariablen $X_n, Y_n, Z_n : \Omega \to \mathbb{R}$.

(a) Seien $y, z \in \mathbb{R}$ deterministische Konstanten mit $Y_n \xrightarrow{p} y$, $Z_n \xrightarrow{p} z$ und sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine in (y, z) stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $h(Y_n, Z_n) \xrightarrow{p} h(y, z)$ gilt.
Hinweis: Nutzen Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit von h mit der 1-Norm $\|\cdot\|_1$ und dem Betrag $|\cdot|$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a, x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie Implikation:

$$X_n \xrightarrow{p} x, \quad Y_n \xrightarrow{p} y, \quad a_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \cdot X_n + Y_n \xrightarrow{p} a \cdot x + y.$$

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Da h stetig in (y, z) ist, gibt es $\delta > 0$, sodass

$$\forall\, (y', z') \in \mathbb{R}^2 : \|(y', z') - (y, z)\|_1 < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |h(y', z') - h(y, z)| < \varepsilon.$$

Entsprechend bedeutet dies:

$$\forall\, (y', z') \in \mathbb{R}^2 : |h(y', z') - h(y, z)| \geq \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \|(y', z') - (y, z)\|_1 \geq \delta.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|h(Y_n, Z_n) - h(y, z)| \geq \varepsilon) \quad &\leq \quad \mathbb{P}(\|(Y_n, Z_n) - (y, z)\|_1 \geq \delta) \\
&= \quad \mathbb{P}(|Y_n - y| + |Z_n - z| \geq \delta) \\
&\leq \quad \mathbb{P}(|Y_n - y| \geq \delta/2 \text{ oder } |Z_n - z| \geq \delta/2) \\
&\leq \quad \mathbb{P}(|Y_n - y| \geq \delta/2) + \mathbb{P}(|Z_n - z| \geq \delta/2) \\
&\overset{Z_n \xrightarrow{p} z,\, Y_n \xrightarrow{p} y}{\longrightarrow} \quad 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

(b) Die Aussage folgt direkt aus (a), indem wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als eine Folge (konstanter) Zufallsvariablen auffassen. Offensichtlich gilt dann für alle $\varepsilon > 0$ und n groß genug mit $|a_n - a| < \varepsilon$,

$$\mathbb{P}(|a_n - a| \geq \varepsilon) \overset{n \text{ groß genug}}{=} \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Damit erhalten wir $a_n \xrightarrow{p} a$.
Weiterhin sind die Funktionen $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h_1(x,y) = x \cdot y$ (gewöhnliche Multiplikation) und $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h_2(x,y) = x + y$ (gewöhnliche Addition) stetig.
Aus $X_n \xrightarrow{p} X$, $a_n \xrightarrow{p} a$ folgt also $a_n X_n = h_1(a_n, X_n) \xrightarrow{p} h_1(a, X) = aX$.
Aus $a_n X_n \xrightarrow{p} aX$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$ folgt daher

$$a_n X_n + Y_n = h_2(a_n X_n, Y_n) \xrightarrow{p} h_2(aX, Y) = aX + Y.$$

Aufgabe 34 (Stochastischer Konvergenz und Konvergenz im quadratischen Mittel, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $U \sim U[0,1]$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ und $X_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{p} 0$, aber nicht $X_n \xrightarrow{(2)} 0$ gilt.

(b) Es gelte $X_n \xrightarrow{p} X$ und es gebe $\alpha > 0$ mit $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{(2)} X$ folgt.
Hinweis: Nutzen Sie $1 = \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}$ *und ohne Beweis die Hölder-Ungleichung für Erwartungswerte: „Sind* $Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ *Zufallsvariablen, so gilt für* $p, q > 0$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*:* $\mathbb{E}[|Y \cdot Z|] \leq \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Z|^q]^{1/q}$*.“*

(c) Zeigen Sie, dass die X_n, X aus (a) die Bedingungen aus (b) nicht erfüllen.

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Für n groß genug ist $\sqrt{n} > \varepsilon$. Dann haben wir

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U) > \varepsilon) \overset{n \text{ groß genug}}{=} \mathbb{P}(U \in [0, 1/n]) \overset{U \sim U[0,1]}{=} \frac{1}{n} \to 0.$$

Weiter haben wir (beachte $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$)

$$\mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = n \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)] = n \cdot \mathbb{P}(U \in [0, \frac{1}{n}]) \overset{U \sim U[0,1]}{=} n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

d.h. $X_n \xrightarrow{(2)} 0$ gilt nicht.

(b) Es ist (wir wenden die Hölder-Ungleichung mit $p = \frac{2+\alpha}{2}$ und $q = \frac{2+\alpha}{\alpha}$ an)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(X_n - X)^2] \\
= \quad & \mathbb{E}[(X_n - X)^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] + \mathbb{E}[(X_n - X)^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}] \\
\overset{(X_n - X)^2 \leq 2(X_n^2 + X^2)}{\leq} \quad & 2 \underbrace{\mathbb{E}[X_n^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}]}_{\leq \mathbb{E}[|X_n|^{2p}]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}^q_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}]^{1/q}} + 2 \underbrace{\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}]}_{\leq \mathbb{E}[|X|^{2p}]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}^q_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}]^{1/q}} \\
& + \mathbb{E}[\underbrace{(X_n - X)^2}_{\leq \varepsilon^2} \underbrace{\mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}}_{\leq 1}] \\
\leq \quad & 2\Big(\mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}]^{\frac{2}{2+\alpha}} + \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}]^{\frac{2}{2+\alpha}}\Big) \cdot \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} + \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Da $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$ und $X_n \xrightarrow{p} X$, schließen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] \leq \varepsilon^2.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt mit $\varepsilon \downarrow 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0.$$

Daher ist $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$.

(c) Da $X = 0$, ist offensichtlich $\mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] = 0 < \infty$ für alle $\alpha > 0$. Allerdings gilt für alle $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}] = n^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)] = n^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{n} = n^{\frac{\alpha}{2}},$$

sodass $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}] = \infty$. Das bedeutet, die Voraussetzungen von (b) sind nicht erfüllt.

Aufgabe 35 (Schätzen von Parametern, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$ unabhängig und Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$. Es soll der Wert $\theta := \mathbb{P}(X_1 = 0) = \exp(-\lambda)$ geschätzt werden. Dazu betrachten wir die folgenden beiden Schätzer für θ:

$$\hat{\theta}_1 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i=0\}}, \qquad \hat{\theta}_2 := \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

(a) Weisen Sie nach, dass $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ konsistente Schätzer für θ sind.
Hinweis: Nutzen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen und Aufgabe 33(a).

(b) Untersuchen Sie $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ auf Erwartungstreue, d.h. überprüfen Sie, ob $\mathbb{E}\hat{\theta}_i = \theta$ $(i = 1, 2)$ gilt.

(c) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler $\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_1) := \mathbb{E}[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2]$ von $\hat{\theta}_1$.

(d) Gilt $\hat{\theta}_i \xrightarrow{(2)} \theta$ $(i = 1, 2)$?
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 34(b) für $\hat{\theta}_2$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} n \cdot (1 - e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}}) = 2 + \alpha$.

Lösung:

(a) • Da die X_i $(i = 1, ..., n)$ iid sind, sind auch die $\mathbb{1}_{\{X_i=0\}}$ $(i = 1, ..., n)$ iid. Weiter gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i=0\}}] = \mathbb{P}(X_i = 0) = \theta$$

und

$$\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{\{X_i=0\}}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}^2_{\{X_i=0\}}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i=0\}}]^2 = \theta - \theta^2 < \infty.$$

Daher ist das schwache Gesetz der großen Zahlen anwendbar und liefert

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i=0\}} \xrightarrow{p} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i=0\}}] = \theta,$$

d.h. $\hat{\theta}_1$ ist ein konsistenter Schätzer für θ.

- Wegen $\mathbb{E}X_i = \lambda$ und $\operatorname{Var}(X_i) = \lambda < \infty$ (beachte $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$) gilt außerdem nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}[X_i] = \lambda.$$

Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \exp(-x)$ ist stetig. Daher ist Aufgabe 33(a) anwendbar und liefert

$$\hat{\theta}_2 = \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \xrightarrow{p} h(\lambda) = \exp(-\lambda) = \theta,$$

d.h. $\hat{\theta}_2$ ist ein konsistenter Schätzer für θ.

(b) - Es gilt

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_1] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_i=0\}}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta = \theta,$$

d.h. $\hat{\theta}_1$ ist erwartungstreu.

- Es gilt

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{X_i}{n}\right)\right] \overset{\text{unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{X_i}{n}\right)\right] \overset{\text{id. verteilt}}{=} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{X_1}{n}\right)\right]^n.$$

Nun ist

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{X_1}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k}{n}} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{-\frac{1}{n}}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{(e^{-\frac{1}{n}}\lambda)} = e^{-\lambda\cdot(1-e^{-\frac{1}{n}})},$$

d.h. wir erhalten $\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] = e^{-\lambda\cdot n\cdot(1-e^{-\frac{1}{n}})} \neq e^{-\lambda} = \theta$. Das bedeutet, $\hat{\theta}_2$ ist nicht erwartungstreu. Man kann jedoch zeigen (wegen $n \cdot (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \to 1$, s.u. in (d)), dass $\hat{\theta}_2$ asymptotisch erwartungstreu ist.
Alternativ kann man auch mit der Faltungseigenschaft der Poisson-Verteilung arbeiten und nutzen, dass $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

(c) Es ist

$$\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_1) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] \overset{\mathbb{E}[\hat{\theta}_1]=\theta}{=} \operatorname{Var}(\hat{\theta}_1) \overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(\mathbb{1}_{\{X_i=0\}}) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{\theta - \theta^2}{n}.$$

(d) - Wir haben bereits in (c) gezeigt, dass

$$\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_1) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] = \frac{\theta - \theta^2}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist schon gezeigt, dass $\hat{\theta}_1 \xrightarrow{(2)} \theta$.

- Möglichkeit 1 für $\hat{\theta}_2$: Wir wollen Aufgabe 34(b) verwenden (alternativ kann man natürlich auch den MSE von $\hat{\theta}_2$ berechnen, was aber aufwendiger ist). Wir haben bereits in (a) gezeigt, dass $\hat{\theta}_2 \xrightarrow{p} \theta$. Nun ist für beliebiges $\alpha > 0$ (nehme zum Beispiel $\alpha = 1$)

$$\mathbb{E}[|\hat{\theta}_2|^{2+\alpha}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(2+\alpha)}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \overset{s.o.}{=} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(2+\alpha)}{n} X_1\right)\right]^n.$$

Wie in (b) berechnen wir

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(2+\alpha)}{n}X_1\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}\cdot k}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}})^k}{k!} = e^{-\lambda\cdot(1-e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}})}.$$

Damit ist

$$\mathbb{E}[|\hat{\theta}_2|^{2+\alpha}] = e^{-\lambda\cdot n\cdot(1-e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}})}.$$

Wegen $n\cdot(1-e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}}) \to 2+\alpha$ gilt daher

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}[|\hat{\theta}_2|^{2+\alpha}] = e^{-\lambda(2+\alpha)} < \infty.$$

Aus Aufgabe 34(b) folgt $\hat{\theta}_2 \overset{(2)}{\to} \theta$.
Berechnung des Limes: Mit L'Hospital gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\cdot(1-e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}}}{n^{-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}}\cdot(-1)\cdot(-(2+\alpha))\cdot n^{-2}}{(-1)\cdot n^{-2}}\\ &= (2+\alpha)\cdot\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}} = (2+\alpha).\end{aligned}$$

- Möglichkeit 2 für den Beweis $\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}|\hat{\theta}_2|^{2+\alpha} < \infty$ (kürzer): Da $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$, ist $X_i \geq 0$ (f.s.) für alle $i = 1,..,n$. Entsprechend ist $\hat{\theta}_2 = \exp(-\overline{X_n}) \leq 1$. Daraus folgt $|\hat{\theta}_2|^{2+\alpha} \leq 1$ für alle $\alpha > 0$ und insbesondere $\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}|\hat{\theta}_2|^{2+\alpha} \leq 1 < \infty$.

Aufgabe 36 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Seien (X,Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig aus $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ ausgewählt wird, d.h. die gemeinsame Dichte von (X,Y) ist

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}\cdot\mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}},\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die Marginalverteilungen f_X und f_Y von X bzw. Y.

(b) Berechnen Sie $\text{Var}(X), \text{Var}(Y)$ sowie $\text{Kov}(X,Y)$ und die Korrelation $\rho(X,Y)$.
Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnungen die Transformationsformel und Polarkoordinaten $(x,y) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$, wobei $r\in[0,1]$ und $\phi\in[0,2\pi)$, für das 2- bzw. $x = \sin(u)$, für das 1-dimensionale Integral.

(c) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind, obwohl sie unkorreliert sind.

Lösung:

(a) Es ist

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}\cdot\mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}} = \frac{1}{\pi}\cdot\mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}} = \frac{1}{\pi}\cdot\mathbb{1}_{\{-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}}\cdot\mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}},$$

also

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y\cdot\mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}} = \frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}},$$

und weil $f_{X,Y}(x,y)$ symmetrisch in x und y ist, folgt analog

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2}\cdot\mathbb{1}_{\{-1\leq y\leq 1\}}.$$

(b) Berechne zunächst $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}[X^2]$.

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{x}_{\text{ungerade}} \cdot \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}} \mathrm{d}x = 0.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

und da der Integrand gerade ist, folgt

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$$

mit der Substitution $x = \sin(u) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos(u) \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos(u)\mathrm{d}u$ folgt

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \int_{u^{-1}(0)=0}^{u^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) \cdot \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{2\sin(u)\cos(u)}_{=\sin(2u)})^2 \mathrm{d}u$$

und mit $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ schließlich

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4u)\right)\mathrm{d}u \quad = \quad \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \quad = \quad \frac{1}{4}.$$

Damit ist

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{4} - 0^2 = \frac{1}{4}.$$

Da $f_X = f_Y$ (d.h. X und Y sind identisch verteilt), folgt $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4}$.
Wir haben weiter

$$\mathrm{Kov}(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}} \frac{1}{\pi} xy\mathrm{d}(x,y)$$

und transformieren nun in Polarkoordinaten, $\psi(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\psi^{-1}(E) = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 1, \phi \in [0,2\pi]\}$,

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cdot (r\cos(\phi)) \cdot (r\sin(\phi)) \cdot r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 r^3 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(2\phi)\mathrm{d}\phi}_{=0} \mathrm{d}r = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\rho(X,Y) = \mathrm{Kov}(X,Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)} = 0$.

(c) Wegen $\mathrm{Kov}(X,Y) = 0$ sind X und Y unkorreliert. Aber X und Y sind nicht unabhängig, weil

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\le 1\}} \\ &\neq \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\le x\le 1\}}\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\le y\le 1\}}\right) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \end{aligned}$$

(Dass linke und rechte Seite sich nicht nur auf einer $\mathbb{R}^2$-Nullmenge unterscheiden, sieht man daran, dass $f_X(x) \cdot f_Y(y)$ in der Menge $[0,1]^2 \setminus E$ positive Werte annimmt, aber $f_{X,Y}(x,y)$ dort überall Null ist).

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **19. Dezember 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`