UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

9. Übungsblatt

Aufgabe 33	Aufgabe 34	Aufgabe 35	Aufgabe 36	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 33 (Rechenregeln für stochastische Konvergenz, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Zufallsvariablen $X_n, Y_n, Z_n : \Omega \to \mathbb{R}$.

(a) Seien $y, z \in \mathbb{R}$ deterministische Konstanten mit $Y_n \xrightarrow{p} y$, $Z_n \xrightarrow{p} z$ und sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine in (y, z) stetige Funktion. Zeigen Sie, dass $h(Y_n, Z_n) \xrightarrow{p} h(y, z)$ gilt.
Hinweis: Nutzen Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit von h mit der 1-Norm $\|\cdot\|_1$ und dem Betrag $|\cdot|$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a, x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie Implikation:

$$X_n \xrightarrow{p} x, \quad Y_n \xrightarrow{p} y, \quad a_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \cdot X_n + Y_n \xrightarrow{p} a \cdot x + y.$$

Aufgabe 34 (Stochastischer Konvergenz und Konvergenz im quadratischen Mittel, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $U \sim U[0, 1]$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ und $X_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{p} 0$, aber nicht $X_n \xrightarrow{(2)} 0$ gilt.

(b) Es gelte $X_n \xrightarrow{p} X$ und es gebe $\alpha > 0$ mit $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{(2)} X$ folgt.
Hinweis: Nutzen Sie $1 = \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}$ und ohne Beweis die Hölder-Ungleichung für Erwartungswerte: „Sind $Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, so gilt für $p, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: $\mathbb{E}[|Y \cdot Z|] \leq \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Z|^q]^{1/q}$.“

(c) Zeigen Sie, dass die X_n, X aus (a) die Bedingungen aus (b) nicht erfüllen.

Aufgabe 35 (Schätzen von Parametern, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$ unabhängig und Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem

Parameter $\lambda > 0$. Es soll der Wert $\theta := \mathbb{P}(X_1 = 0) = \exp(-\lambda)$ geschätzt werden. Dazu betrachten wir die folgenden beiden Schätzer für θ:

$$\hat{\theta}_1 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i=0\}}, \qquad \hat{\theta}_2 := \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

(a) Weisen Sie nach, dass $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ konsistente Schätzer für θ sind.
Hinweis: Nutzen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen und Aufgabe 33(a).

(b) Untersuchen Sie $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ auf Erwartungstreue, d.h. überprüfen Sie, ob $\mathbb{E}\hat{\theta}_i = \theta$ $(i = 1, 2)$ gilt.

(c) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler $\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_1) := \mathbb{E}[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2]$ von $\hat{\theta}_1$.

(d) Gilt $\hat{\theta}_i \xrightarrow{(2)} \theta$ $(i = 1, 2)$?
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 34(b) für $\hat{\theta}_2$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} n \cdot (1 - e^{-\frac{(2+\alpha)}{n}}) = 2 + \alpha$.

Aufgabe 36 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Seien (X, Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig aus $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ausgewählt wird, d.h. die gemeinsame Dichte von (X, Y) ist

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die Marginalverteilungen f_X und f_Y von X bzw. Y.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$ sowie $\mathrm{Kov}(X, Y)$ und die Korrelation $\rho(X, Y)$.
Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnungen die Transformationsformel und Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$, wobei $r \in [0, 1]$ und $\phi \in [0, 2\pi)$, für das 2- bzw. $x = \sin(u)$, für das 1-dimensionale Integral.

(c) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind, obwohl sie unkorreliert sind.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **19. Dezember 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`