UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen

Wintersemester 2019/2020

8. Übungsblatt

Aufgabe 29	Aufgabe 30	Aufgabe 31	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 29 (Stichprobenmittelwert, Stichprobenvarianz und empirische Verteilungsfunktion, 4 = 1 + 1.5 + 1.5 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$ und Verteilungsfunktion F. Seien für $t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2, \qquad \hat{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \le t\}}$$

der Stichprobenmittelwert, die Stichprobenvarianz und die empirische Verteilungsfunktion.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[\overline{X_n}]$ und $\mathrm{Var}(\overline{X_n})$ in Termen von n, μ, σ^2.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_n^2]$ in Termen von n, μ, σ^2.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - \overline{X_n}^2\right)$ *gilt.*

(c) Berechnen Sie die Verteilung von $n \cdot \hat{F}_n(t)$ und geben Sie dann $\mathbb{E}[\hat{F}_n(t)]$ und $\mathrm{Var}(\hat{F}_n(t))$ in Termen von $n, F(t)$ an.

Aufgabe 30 (Konstruktion von Konfidenzintervallen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U[0, \theta]$ gleichverteilt auf $[0, \theta]$ mit Parameter $\theta > 0$ und $\mathbb{P}_\theta := \mathbb{P}^{X_1,...,X_n}$ die gemeinsame Verteilung dieser Zufallsvariablen.

(a) Sei $\theta_0 > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\phi_{\theta_0} : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}, \quad \phi_{\theta_0}(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \max(x_1, ..., x_n) \le \theta_0 \cdot \alpha^{1/n}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für die Hypothesen $H_0 : \theta \ge \theta_0$ gegen $H_1 : \theta < \theta_0$ ein Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung der Verteilungsfunktion Aufgabe 28 (a).

(b) Konstruieren Sie mittels Satz 9.3 aus ϕ_{θ_0} ein $(1 - \alpha)$-Konfidenzintervall $S(X)$ für θ.

(c) Sei nun $\alpha = 0.1$. Wie groß muss die Anzahl der Beobachtungen n gewählt werden, damit die Länge von $S(X)$ kleiner als 1 ist, wenn Sie wissen, dass die maximale Beobachtung den Wert 0.95 annimmt?

Aufgabe 31 (Konstruktion von gleichmäßig besten Tests und Konfidenzintervallen, 8 = 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 Punkte).

Wir untersuchen eine Maschine, die Schrauben herstellt. Uns ist bekannt (und das zweifeln wir nicht an), dass die Länge der Schrauben im Mittel $\mu = 5$ beträgt (Angabe in cm). Der Hersteller behauptet, dass die Standardabweichung der Länge der Schrauben höchstens $\sigma_0 = 0.3$ cm beträgt. Wir vermuten jedoch, dass die Standardabweichung tatsächlich größer ist. Für eine statistische Untersuchung nehmen wir an, dass die Länge der Schrauben normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ. Für $n = 10$ Schrauben beobachten wir folgende Längen (in cm):

5.6	5.2	4.1	3.7	6.5	3.6	6.0	6.1	5.2	4.2

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$. Nutzen Sie das auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ verallgemeinerte Neyman-Pearson-Lemma 6.19, um einen besten Test $\phi^* : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ für die einfachen Hypothesen

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \sigma = \sigma_1$$

mit $\sigma_1 > \sigma_0$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ anzugeben.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Dichte f_σ der gemeinsamen Verteilung $\mathbb{P}_\sigma = \mathbb{P}^{X_1,...,X_n}$ von $X_1, ..., X_n$ mit Hilfe von Satz 8.11.

(b) Zeigen Sie mittels der Technik der monotonen Likelihood-Quotienten, dass ϕ^* die Form

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c^{**}, \\ 0, & T(x) \le c^{**} \end{cases}$$

besitzt, wobei $T(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$. Folgern Sie, dass ϕ^* sogar gleichmäßig bester Test ist für $H_0 : \sigma = \sigma_0$ gegen $H_1' : \sigma > \sigma_0$.

(c) Zeigen Sie, dass ϕ^* sogar gleichmäßig bester Test ist für $H_0' : \sigma \le \sigma_0$ gegen $H_1' : \sigma > \sigma_0$.
Hinweis: Definieren Sie $Z_n := \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$. Überlegen Sie sich, dass die Verteilung von Z_n nicht mehr von σ abhängt. Zeigen Sie dann, dass $\mathbb{P}_\sigma(\phi^* = 1) \le \alpha$ gilt für $\sigma \le \sigma_0$.

(d) Es ist bekannt, dass $Z_n \sim \chi_n^2$, wobei χ_n^2 die Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet. Zeigen Sie, dass $c^{**} = \sigma_0^2 \cdot \chi_{n,1-\alpha}^2$, wobei $\chi_{n,1-\alpha}^2$ das $(1-\alpha)$-Quantil dieser Verteilung bezeichnet.

(e) Wir drücken nun die Abhängigkeit des Tests ϕ^* von σ_0 explizit aus, indem wir ihn mit $\phi_{\sigma_0}^*$ bezeichnen. Bestimmen Sie den Annahmebereich $A(\sigma_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_{\sigma_0}^*(x) = 0\}$ des Tests und damit ein gleichmäßig bestes $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $S(X)$ für σ mittels Satz 9.3. Für welche falschen Parameter wurde dieses Intervall konstruiert?

(f) Sei nun $\alpha = 0.05$. Werden Sie den Hersteller der Maschine auf Basis unserer Beobachtungen und des Tests ϕ^* aus (b) vorwerfen, dass die Angabe der Standardabweichung falsch ist? Geben Sie auf Basis unserer Beobachtungen das 95%-Konfidenzintervall für σ aus (e) an.
Hinweis: Hier sind einige Quantile der χ_n^2-Verteilung: $\chi_{10,0.05}^2 = 3.94$, $\chi_{10,0.95}^2 = 18.31$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **12. Dezember 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`