UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

7. Übungsblatt – Lösungen

Aufgabe 25	Aufgabe 26	Aufgabe 27	Aufgabe 28	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 25 (Gemeinsame Verteilung von stetigen Zufallsvariablen, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stetig verteilte Zufallsvariablen, deren gemeinsame Dichte durch

$$f_{X,Y}(x,y) = c \cdot xy \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y \leq 2\}} = \begin{cases} c \cdot xy, & 0 \leq x \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie $c > 0$, so dass $f_{X,Y}$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X bzw. Y.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$ und $\mathbb{P}(2X \geq Y)$.

(d) Argumetieren Sie, warum X, Y stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

(a) Die Eigenschaft $f_{X,Y} \geq 0$ ist offensichtlich erfüllt.
Es bleibt die Normierungsbedingung zu erfüllen, d.h.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}(x,y) = c \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y \leq 2\}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= c \cdot \int_0^2 \int_x^2 xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x = c \cdot \int_0^2 x \cdot \left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^2 \mathrm{d}x = c \cdot \int_0^2 2x - \frac{1}{2}x^3 \mathrm{d}x \\ &= c \cdot \left[x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^2 = c \cdot (2 - 0) = 2c. \end{aligned}$$

Damit folgt $c = \frac{1}{2}$.

(b) Für die Berechnung der Randdichten muss die jeweils andere Variable „herausintegriert" werden; wichtig sind hierbei die Indikatorfunktionen.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\leq 2\}}}_{=\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 2\}}\cdot\mathbb{1}_{\{x\leq y\leq 2\}}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 2\}}\cdot x\cdot\int_x^2 y\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 2\}}\cdot x\cdot(2-\frac{1}{2}x^2), \\
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\leq 2\}}}_{=\mathbb{1}_{\{0\leq y\leq 2\}}\cdot\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0\leq y\leq 2\}}\cdot y\cdot\int_0^y x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{1}_{\{0\leq y\leq 2\}}\cdot y^3.
\end{aligned}$$

(c) Zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit gibt es zwei formal gleiche Möglichkeiten. Entweder man nutzt

$$\mathbb{P}(X+Y\leq 1) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X+Y\leq 1\}}] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x+y\leq 1\}}\cdot f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

oder

$$\mathbb{P}(X+Y\leq 1) = \mathbb{P}((X,Y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq 1\}) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+y\leq 1\}} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

Wir bevorzugen die erste Variante aufgrund des kleineren Schreibaufwands.
Für festes $x\in[0,2]$ wird an y gefordert, dass

$$x\leq y\leq 2, y\leq 1-x \quad\Longleftrightarrow\quad x\leq y\leq 1-x \quad\Longrightarrow\quad x\leq\frac{1}{2}.$$

Die Bedingung hält also, wenn $x\leq\frac{1}{2}$. Daher wird tatsächlich über $x\in[0,\frac{1}{2}]$ integriert. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y\leq 1) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x\cdot y\cdot\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\leq 2\}}\mathbb{1}_{\{x+y\leq 1\}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x\cdot\int_x^{1-x} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} x\cdot((1-x)^2-x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} x-2x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{96}.
\end{aligned}$$

Gleiches Vorgehen bei der zweiten Wahrscheinlichkeit liefert die äquivalenten Bedingungen $0\leq y\leq 2$ und $\frac{y}{2}\leq x\leq y$. Daher gilt

$$\mathbb{P}(2X\geq Y) = \frac{1}{2}\int_0^2 y\cdot\int_{\frac{y}{2}}^y x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^2 y\cdot(y^2-\frac{1}{4}y^2)\mathrm{d}y = \frac{3}{16}\int_0^2 y^3\mathrm{d}y = \frac{3}{4}.$$

(d) Die Zufallsvariablen X, Y sind nicht stochastisch unabhängig, da offensichtlich nicht $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ überall außer auf einer Lebesgue-Nullmenge gilt. Konkret ist $f_{X,Y}$ auf dem gesamten Bereich $\{(x,y)\in[0,2]^2 : x>y\}$ identisch Null; die rechte Seite $f_X\cdot f_Y$ aber ist es nicht. Man kann zum Beispiel

$$\mathbb{P}(X\in[1,2], Y\in[0,1]) \neq \mathbb{P}(X\in[1,2])\cdot\mathbb{P}(Y\in[0,1])$$

zeigen, da

$$\mathbb{P}(X \in [1,2], Y \in [0,1]) \leq \mathbb{P}(X \geq Y) = 0,$$

aber

$$\mathbb{P}(X \in [1,2]) = \int_1^2 f_X(x)\mathrm{d}x \neq 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Y \in [0,1]) = \int_0^1 f_Y(y)\mathrm{d}y \neq 0.$$

Aufgabe 26 (Gemeinsame Verteilung von diskreten Zufallsvariablen, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $X_n \sim \mathrm{Bin}(1,p)$ Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$. Weiter sei $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ eine von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Wir definieren nun

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Für den Fall $N = 0$ ergibt sich eine leere Summe, weswegen $S = 0$.

(a) Berechnen Sie für $n, s \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ die gemeinsame Zähldichte

$$p_{S,N}(s,n) = \mathbb{P}(S = s, N = n).$$

Hinweis: Nutzen Sie Beispiel 8.13 der Vorlesung.

(b) Bestimmen Sie die Randdichte $p_S(s)$ von S.

(c) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Kov}(S,N) := \mathbb{E}[S \cdot N] - \mathbb{E}[S] \cdot \mathbb{E}[N]$ zwischen S und N mit Hilfe von Satz 8.16 der Vorlesung.

Lösung:

(a) Beachte, dass laut Beispiel 8.13 für festes $n \in \mathbb{N}$ gerade $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ gilt. Wir erhalten für $s, n \in \mathbb{N}_0$ dann

$$\begin{aligned}
p_{S,N}(s,n) &= \mathbb{P}(S = s, N = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = s, N = n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = s, N = n\right) \mathbb{1}_{\{s \leq n\}} \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = s\right) \cdot \mathbb{P}(N = n) \mathbb{1}_{\{s \leq n\}} \\
&= \left(\binom{n}{s} p^s \cdot (1-p)^{n-s}\right) \cdot \left(\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\right) \mathbb{1}_{\{s \leq n\}}.
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist auch für $n = s = 0$ wohldefiniert und liefert den korrekten Wert, $p_{S,N}(0,0) = e^{-\lambda}$. Dies ist insofern relevant, weil $S = 0$ im Falle $N = 0$ gesetzt wurde.

(b) Für $s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
p_S(s) &= \mathbb{P}(S = s) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{s} \cdot p^s \cdot (1-p)^{n-s} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \mathbb{1}_{\{s \le n\}} = \frac{e^{-\lambda} \cdot p^s}{s!} \cdot \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot (1-p)^{n-s}}{(n-s)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} \cdot p^s}{s!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s} \cdot (1-p)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot (\lambda p)^s}{s!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot (1-p))^n}{n!} \qquad (*) \\
&= \frac{e^{-\lambda} \cdot (\lambda p)^s}{s!} \cdot e^{\lambda \cdot (1-p)} = \frac{(\lambda p)^s}{s!} \cdot e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

Damit ist $S \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ Poisson-verteilt mit Parameter λp.

(c) Da $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, gilt $\mathbb{E}N = \lambda$. Aus (b) wissen wir zudem $S \sim \mathcal{P}(\lambda p)$, d.h. $\mathbb{E}S = \lambda p$. Es bleibt nun noch $\mathbb{E}[SN]$ zu bestimmen. Es gilt mit denselben Umformungen wie in $(*)$ gerade

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[SN] &= \sum_{s,n=0}^{\infty} s \cdot n \cdot p_{S,N}(s,n) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^s}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot (1-p))^n}{n!} \cdot (n+s) \cdot s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^s}{s!} \left(s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot (1-p))^n}{(n-1)!} + s^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot (1-p))^n}{n!} \right) \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \left(\lambda \cdot (1-p) \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\lambda p)^s}{(s-1)!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\lambda p)^s}{(s-1)!} \cdot s \right) \\
&\overset{s=(s-1)+1}{=} e^{-\lambda p} \left(\lambda^2 p(1-p) \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^s}{s!} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(\lambda p)^s}{(s-2)!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\lambda p)^s}{(s-1)!} \right) \\
&= e^{-\lambda p} \left(\lambda^2 p(1-p) e^{\lambda p} + (\lambda p)^2 e^{\lambda p} + \lambda p e^{\lambda p} \right) \\
&= p \cdot (\lambda^2 + \lambda).
\end{aligned}$$

Zwischendurch erfolgte eine Indexverschiebung $n \mapsto n + s$.
Damit erhalten wir für die Kovarianz von S und N genau

$$\mathrm{Kov}(S, N) = \mathbb{E}[SN] - \mathbb{E}S\mathbb{E}N = p(\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 p = \lambda p.$$

Anmerkung: Die Kovarianz ist positiv, da für größeres N auch die Summe S größer wird. Außerdem wächst die Kovarianz mit p, denn je häufiger $X_i = 1$ in der Summe ist, desto näher ist der Wert von S an N.

Aufgabe 27 (Faltung von stetigen Zufallsvariablen, 4 = 1.5 + 1.5 +1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stochastisch unabhängige und stetig verteilte Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsdichten f_X bzw. f_Y.

(a) Sei $Z := X + Y$. Zeigen Sie, dass Z ebenfalls stetig verteilt ist mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y.$$

Die so definierte Zufallsvariable Z wird auch als „Faltung“ von X und Y bezeichnet.
Hinweis: Berechnen Sie erst die Verteilungsfunktion F_Z von Z mittels Satz 8.6 und nutzen Sie dann Definition 8.4(ii) der Vorlesung. Der Satz von Fubini erlaubt hier die beliebige Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

(b) Seien nun $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Zeigen Sie, dass

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Hinweis: Begründen Sie, warum man ohne Einschränkungen $\mu_1 = \mu_2 = 0$ und $\sigma_1 = 1$ annehmen darf. Nutzen Sie weiter eine quadratische Ergänzung im Exponenten.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $X_1, ..., X_n$ iid $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ der Mittelwert. Berechnen Sie die Verteilung von

$$Z_n := \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}.$$

Lösung:

(a) Da X, Y unabhängig sind, gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gerade $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Es gilt für alle $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \mathbb{P}((X, Y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq z\}) \\
&= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq z\}} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}(x, y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y\leq z\}} f_X(x) f_Y(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\overset{v=v(x):=x+y}{=} \int_{-\infty}^{z}\int_{\mathbb{R}} f_X(v - y) f_Y(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Nach der Definition einer Wahrscheinlichkeitsdichte gilt daher

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z - y) f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

(b) Nach dem Satz über die lineare Transformation von Zufallsvariablen und die konkrete Anwendung in Bemerkung 6.15 (Spezialfall) gilt für eine normalverteilte Zufallsvariable $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ der Zusammenhang $aW + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Wir betrachten die Darstellung

$$X + Y = \sigma_1 \left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{Y - \mu_2}{\sigma_1} \right) + (\mu_1 + \mu_2).$$

Die Zufallsvariablen $X' := \frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $Y' := \frac{Y-\mu_2}{\sigma_1} \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})$ sind laut Satz 8.15 (Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen sind wieder unabhängig) unabhängig. Haben wir nun

$$X' + Y' \sim \mathcal{N}\left(0, 1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) \tag{$*$}$$

gezeigt, so folgt wieder mit der linearen Transformation 6.15:

$$X + Y = \sigma_1(X' + Y') + (\mu_1 + \mu_2) \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Zum Beweis von $(*)$ nutzen wir die Formel aus (a) und die Abkürzung $\sigma := \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. Hier ist $f_{X'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ und $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-x^2/(2\sigma^2))$, also gilt für $Z = X' + Y'$:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z - y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(z - y)^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y.$$

Wir beachten, dass

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{\sigma^2} + (z-y)^2 &= \frac{y^2}{\sigma^2} + z^2 - 2yz + y^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\right) \cdot \left(y^2 - 2y \cdot \frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}} + \left(\frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}}\right)^2\right) + z^2 \left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{\sigma^2}}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\right) \cdot \left(y - \frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}}\right)^2 + \frac{z^2}{1+\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{(1+\frac{1}{\sigma^2})^{-1/2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\frac{1}{\sigma^2})^{-1}}} \exp\left(-\frac{1}{2(1+\frac{1}{\sigma^2})^{-1}}\left(y - \frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}}\right)^2\right) \mathrm{d}y}_{=1} \\
&\qquad \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\sigma^2)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{z^2}{1+\sigma^2}\right),
\end{aligned}$$

da im Integral die Dichte einer $\mathcal{N}\left(\frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}}, (1+\frac{1}{\sigma^2})^{-1}\right)$-Verteilung steht.
Wir erhalten die Dichte einer $\mathcal{N}(0, 1+\sigma^2)$-Verteilung.

(c) Wenden wir (b) induktiv an, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu, \sum_{i=1}^n \sigma^2\right) = N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2).$$

Die Bemerkung 6.15 (Spezialfall) über die lineare Transformation von Zufallsvariablen liefert

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}),$$

also

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n}).$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Aufgabe 28 (Minimum und Maximum von iid Zufallsvariablen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig und identisch, stetig verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F_X. Wir definieren die Zufallsvariablen $M_1 := \min(X_1, ..., X_n)$ und $M_2 := \max(X_1, ..., X_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktionen von M_1 und M_2 gegeben sind durch

$$F_{M_1}(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n \qquad \text{und} \qquad F_{M_2}(z) = F_X(z)^n.$$

Hinweis: Finden Sie eine zu $\max(x_1, ..., x_n) \leq z$ *äquivalente Aussage, die Bedingungen an die einzelnen* x_i *stellt.*

(b) Sei nun $X_1 \sim U[0,\theta]$ (bzw. auch $\mathcal{R}[0,\theta]$) gleichverteilt auf $[0,\theta]$ mit Parameter $\theta > 0$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f_{M_2} von M_2 und berechnen Sie $\mathbb{E}M_2$.

(c) Sei nun $X_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Welche bekannte Verteilung besitzt M_1?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\max(X_1,...,X_n) \le z \iff X_1 \le z,...,X_n \le z$$

und

$$\min(X_1,...,X_n) > z \iff X_1 > z,...,X_n > z.$$

Unter Nutzung dieser Ungleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{M_2}(z) &= \mathbb{P}(M_2 \le z) = \mathbb{P}(\max(X_1,...,X_n) \le z) = \mathbb{P}(X_1 \le z,...,X_n \le Z) \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{P}(X_1 \le z) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_n \le z) \\ &\overset{\text{identisch verteilt}}{=} \mathbb{P}(X_1 \le z)^n = F_X(z)^n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_{M_1}(z) &= \mathbb{P}(M_1 \le z) = 1 - \mathbb{P}(M_1 > z) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1,...,X_n) > z) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > z,...,X_n > z) \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} 1 - \mathbb{P}(Z_1 > z) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_n > z) \\ &\overset{\text{identisch verteilt}}{=} 1 - \mathbb{P}(X_1 > z)^n = 1 - (1 - F_X(z))^n. \end{aligned}$$

(b) Nun ist $f_X(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$, weswegen für $x \in [0,\theta]$ gilt:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\theta}\int_0^x \mathrm{d}y = \frac{x}{\theta}.$$

Wir erhalten nach (a) für $x \in [0,\theta]$ demnach

$$F_{M_2}(x) = F_X(x)^n = \frac{x^n}{\theta^n}.$$

Für die Dichte von M_2 erhalten wir durch Differenzieren für $x \in (0,\theta)$:

$$f_{M_2}(x) = F'_{M_2}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}.$$

Offensichtlich ist $f_{M_2}(x) = 0$ für $x \notin (0,\theta)$, da $X_1,...,X_n \in [0,\theta]$ und folglich auch $M_2 = \max(X_1,...,X_n) \in [0,\theta]$ gilt. Wir erhalten also insgesamt

$$f_{M_2}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x).$$

Der Erwartungswert von M_2 berechnet sich durch

$$\mathbb{E}M_2 = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{M_2}(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\theta.$$

(c) Nun ist $f_X(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x\ge 0\}}$ bzw. $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{x\ge 0}$. Wir erhalten für $x \ge 0$:

$$F_{M_1}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - e^{-\lambda n x},$$

d.h. $M_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda n)$ ist wieder exponentialverteilt mit Parameter λn.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **05. Dezember 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`