UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Nathawut Phandoidaen
Wintersemester 2019/2020

7. Übungsblatt

Aufgabe 25	Aufgabe 26	Aufgabe 27	Aufgabe 28	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 25 (Gemeinsame Verteilung von stetigen Zufallsvariablen, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stetig verteilte Zufallsvariablen, deren gemeinsame Dichte durch

$$f_{X,Y}(x,y) = c \cdot xy \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y \leq 2\}} = \begin{cases} c \cdot xy, & 0 \leq x \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie $c > 0$, so dass $f_{X,Y}$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X bzw. Y.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$ und $\mathbb{P}(2X \geq Y)$.

(d) Argumentieren Sie, warum X, Y stochastisch abhängig sind.

Aufgabe 26 (Gemeinsame Verteilung von diskreten Zufallsvariablen, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $X_n \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$. Weiter sei $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ eine von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Wir definieren nun

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Für den Fall $N = 0$ ergibt sich eine leere Summe, weswegen $S = 0$.

(a) Berechnen Sie für $n, s \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ die gemeinsame Zähldichte

$$p_{S,N}(s, n) = \mathbb{P}(S = s, N = n).$$

Hinweis: Nutzen Sie Beispiel 8.13 der Vorlesung.

(b) Bestimmen Sie die Randdichte $p_S(s)$ von S.

(c) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Kov}(S,N) := \mathbb{E}[S \cdot N] - \mathbb{E}[S] \cdot \mathbb{E}[N]$ zwischen S und N mit Hilfe von Satz 8.16 der Vorlesung.

Aufgabe 27 (Faltung von stetigen Zufallsvariablen, 4 = 1.5 + 1.5 +1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stochastisch unabhängige und stetig verteilte Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsdichten f_X bzw. f_Y.

(a) Sei $Z := X + Y$. Zeigen Sie, dass Z ebenfalls stetig verteilt ist mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y.$$

Die so definierte Zufallsvariable Z wird auch als „Faltung“ von X und Y bezeichnet.
Hinweis: Berechnen Sie erst die Verteilungsfunktion F_Z von Z mittels Satz 8.6 und nutzen Sie dann Definition 8.4(ii) der Vorlesung. Der Satz von Fubini erlaubt hier die beliebige Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

(b) Seien nun $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Zeigen Sie, dass

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Hinweis: Begründen Sie, warum man ohne Einschränkungen $\mu_1 = \mu_2 = 0$ und $\sigma_1 = 1$ annehmen darf. Nutzen Sie weiter eine quadratische Ergänzung im Exponenten.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $X_1, ..., X_n$ iid $\mathcal{N}(\mu, \ \sigma^2)$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert. Berechnen Sie die Verteilung von

$$Z_n := \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}.$$

Aufgabe 28 (Minimum und Maximum von iid Zufallsvariablen, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig und identisch, stetig verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F_X. Wir definieren die Zufallsvariablen $M_1 := \min(X_1, ..., X_n)$ und $M_2 := \max(X_1, ..., X_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktionen von M_1 und M_2 gegeben sind durch

$$F_{M_1}(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n \qquad \text{und} \qquad F_{M_2}(z) = F_X(z)^n.$$

Hinweis: Finden Sie eine zu $\max(x_1, ..., x_n) \leq z$ äquivalente Aussage, die Bedingungen an die einzelnen x_i stellt.

(b) Sei nun $X_1 \sim U[0, \theta]$ (bzw. auch $\mathcal{R}[0, \theta]$) gleichverteilt auf $[0, \theta]$ mit Parameter $\theta > 0$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f_{M_2} von M_2 und berechnen Sie $\mathbb{E}M_2$.

(c) Sei nun $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Welche bekannte Verteilung besitzt M_1?

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **05. Dezember 2019, 11:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/ews-WS1920/index.html`